ベイズの定理

事象 A, B に対し、 $B=(A\cap B)\cup(A^c\cap B)$ とできるので、

定理1.2.1 と排反の条件から、

$P(B)=P(A\cap B)+P(A^c\cap B)=P(A)\cdot P(B|A)+P(A^c)\cdot P(B|A^c)$

とできる。これを一般化すると次を得る。

定理1.2.3

事象 $A_1,\cdots,A_n$ が排反で、 $A_1\cup\cdots\cup A_n=\Omega$ であるとき、

$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+\cdots+P(A_n)\cdot P(B|A_n)$

∵ $B=(A_1\cap B)\cup\cdots\cup(A_n\cap B)$ とできるので、

$P(B)=P(A_1\cap B)+\cdots+P(A_n\cap B)$

$\quad=P(A_1)\cdot P(B|A_1)+\cdots+P(A_n)\cdot P(B|A_n)$

条件付き確率 $P(B|A)$ を、 A が原因、B が結果と考えると、

$P(B|A)$ は原因と結果の因果関係の強さを表しているともいえる。

定理1.2.4.（ベイズの定理）

事象 B を引き起こす原因として、$A_1,\cdots,A_n$ が考えられ、これらは排反とする。

このとき、B が起こった原因が A_k である確率 $P(A_k|B)$ は

$$P(A_k|B)=\frac{P(A_k)\cdot P(B|A_k)}{P(A_1)P(B|A_1)+\cdots+P(A_n)\cdot P(B|A_n)}$$ である。

∵ $P(A_k\cap B)=P(B\cap A_k)$ より

$P(B)P(A_k|B)=P(A_k)\cdot P(B|A_k)$ となり

$P(A_k|B)=\dfrac{P(A_k)P(B|A_k)}{P(B)}$ となる。これに定理1.2.3を使えばよい。

例10 事象A,B,Cを、それぞれとり出したクッキーを作ったのがX,Y,Zであるとし、
事象Eを割れクッキーをとる、とすると、

$$P(A|E)=\frac{P(A)P(E|A)}{P(A)P(E|A)+P(B)P(E|B)+P(C)\cdot P(E|c)}$$

$$=\frac{0.35\times0.08}{0.35\times0.08+0.4\times0.05+0.25\times0.03}=\frac{56}{111}$$ である。

問題 11 12

11 事象A,B,CをそれぞれX,Y,Z社製である、とし、
事象Eを不良品を取る、とすると、

$$P(A|E)=\frac{0.4\times0.02}{0.4\times0.02+0.3\times0.04+0.3\times0.05}=\frac{8}{35}$$ である。

12 事象Aを1点差以内，事象Bを2点差以上、事象Eを試合に勝つ、とすると

$$P(A|E)=\frac{P(A)P(E|A)}{P(A)P(E|A)+P(B)\cdot P(E|B)}$$

$$=\frac{0.6\times0.7}{0.6\times0.7+0.4\times0.5}=\frac{42}{62}=\frac{21}{31}$$ である

離散型確率変数と確率分布

サイコロなげで出る目をXとし，そのとりうる値と確率を表にすると、

X	1	2	3	4	5	6
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

となる。

このように、事象を変数に対応させるとき，この変数を確率変数という

特にXの値がとびとびの値をとるとき，離散型という

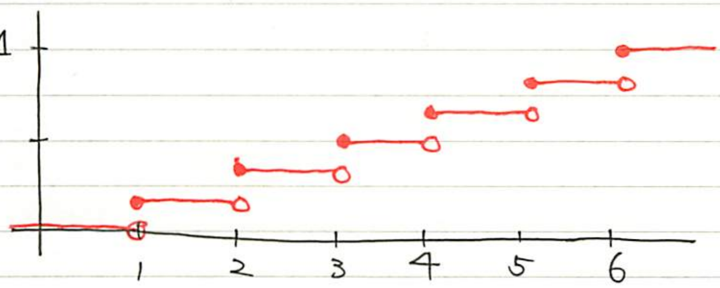
表のような、確率変数 X がとりうる値 $x_1, \cdots, x_n$ と、その確率

$p_i = P(X = x_i)$ の対応を確率分布という。また、

$F(x) = P(X \leqq x) = \sum_{x_i \leqq x} p_i$ ← X が x 以下の確率

で定義される関数を X の分布関数という。

例 13 サイコロ投げの分布関数は



となる。

例えば、$F(\frac{5}{2}) = P(X \leqq \frac{5}{2}) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{1}{3}$

$F(3) = P(X \leqq 3) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = \frac{1}{2}$ である。

$F(x)$ は必ず非減少関数であり、

$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$, $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ となる。

また、分布関数から確率分布を求めることもできる。

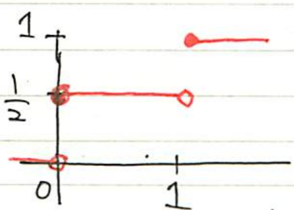
$p_1 = F(x_1)$, $p_{i+1} = F(x_{i+1}) - F(x_i)$

問題 13 14

解答 13

X	0	1
確率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

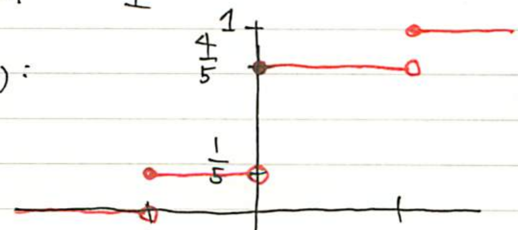
$F(x)$:



14 $\frac{1}{5} + \frac{3}{5} + P = 1$ より $P = \frac{1}{5}$

$P(X^2 = 1) = P(X=1) + P(X=-1) = \frac{2}{5}$

$F(x)$:



となる。