測度

定義2.1 Xを集合, $\mathcal{M}$をXの部分集合の集合(集合族という)とする.
$\mathcal{M}$が次の3つをみたすとき, σ-集合体という.

(1) $X \in \mathcal{M}$

(2) $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}$

(3) $A_n \in \mathcal{M} \ (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.

例 (1) $\mathcal{M}$をXの全ての部分集合とすると. $\mathcal{M}$はσ-集合体.

(2) $\mathcal{M} = \{X, \phi\}$も$\sigma$-集合体.

(3) $X = \{a, b, c\}$のとき

$\mathcal{M} = \{X, \phi, \{a\}, \{b, c\}\}$も$\sigma$-集合体. $|X| = 3$のときは

本質的にこれと(1)(2)のものだけ

(4) $\mathcal{M}$を考えるのにある部分集合族$\mathcal{D}$を考え「$\mathcal{D}$を含む最小のσ-集合体

を$\mathcal{M}$とする」という定義もよく使う.

例えば. $\mathbb{R}$において.

$\mathcal{D} = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}\}$として.

$\mathcal{M}$を. $\mathcal{D}$を含むσ-集合体で定義する.

このとき. $\underset{[a,b] \notin}{(a, b) \notin \mathcal{D}}$であるが. $\underset{[a,b]}{(a, b)} \underset{\in}{\in} \mathcal{M}$である.

∵ $A_n = [a + \frac{1}{n}, b)$とすれば

$\bigcup A_n = (a, b)$となる.

命題2.2 X の σ-集合体 M について. 次がいえる.

(1) $\phi \in M$

(2) $A_n \in M \quad (1 \leq n \leq k) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{k} A_n \in M$

(3) $A_n \in M \quad (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in M$.

(4) $A, B \in M \Rightarrow A \setminus B \in M$.

∵ (1) $X \in M$, $X^c \in M$ よりわかる

(2) $A_n = \phi \quad (n \geq k+1)$ として. Def 2.1 (3) を使う.

(3) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \right)^c$ よりわかる.

(4) $A \setminus B = B^c \cap A$ よりわかる.

次に. σ-集合体 M 上に測度 μ を定める.

定義2.3.

∞も入る.

写像 $\mu : M \longrightarrow [0, \infty]$ が次をみたすとき. μ を測度という.

条件☆ : $A_n \in M \quad (n \in \mathbb{N})$, $A_n \cap A_m = \phi \quad (n \neq m)$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

また. $\exists A \in M$. s.t $\mu(A) < \infty$ としておく.

例. $D = \{ [a, b) \mid a, b \in \mathbb{R} \}$ ($\mathbb{R}$において), M を D を含む最小の σ-集合体 とするとき.

$\mu([a, b)) = b - a$ を拡張する形で μ を定義すると.

μ は測度になる $\longrightarrow$ 測度は長さや面積の概念を拡張したもの.

定理2.4 μ を M 上の測度とすると次が成り立つ.

(1) $\mu(\phi)=0$

(2). A_n が排反 $(A_n\cap A_m=\phi,\ n\neq m) \Rightarrow \mu(\bigcup_{n=1}^{k}A_n)=\sum_{n=1}^{k}\mu(A_n)$

(3). $A\subset B \Rightarrow \mu(A)\leq\mu(B)$

(4) $A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\ ,\ A_1\subset A_2\subset\cdots \Rightarrow \mu(A)=\lim\mu(A_n)$

(5) $A=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n\ ,\ A_1\supset A_2\supset\cdots \Rightarrow \mu(A)=\lim\mu(A_n)$

$\because$ (1) $\mu(A)<\infty$ とし. $A_1=A$ とする.

また. $A_2=A_3=\cdots=\phi$ とすると. $\cancel{\ast}$ より

$\mu(\bigcup A_n)=\sum\mu(A_n)$

$\mu(A)=\mu(A)+\mu(\phi)+\cdots+\mu(\phi)+\cdots$ となり

$\mu(\phi)=0$ をえる.

(2). $A_n=\phi\quad(n\geq k+1)$ とすればよい.

(3). $C=B\setminus A$ とすると.

$\mu(B)=\mu(A\cup C)=\mu(A)+\mu(C)$ となりわかる.

(4). $B_1=A_1,\ B_n=A_n\setminus A_{n-1}\quad(n\geq 2)$ とすると.

B_n は排反かつ. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B_n=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$. かつ. $A_k=\bigcup_{n=1}^{k}B_n$

$\therefore \mu(A_k)=\mu(\bigcup^{k}B_n)=\sum^{k}\mu(B_n)$

$\mu(A)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(B_n)=\lim_{k}\sum^{k}\mu(B_n)=\lim\mu(A_k)$ となる.

(5) $C_n = A_1 \setminus A_n$ とすると $C_1 \subset C_2 \subset C_3 \subset \cdots$ と.

$\mu(C_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n)$ がわかる.

$\bigcup C_n = A_1 \setminus A$ より

$\mu(A_1) - \mu(A) = \mu(\bigcup C_n) = \lim \mu(C_n) = \mu(A_1) - \lim \mu(A_n)$ となる.

例 (2.) $X = \{1, \cdots, 6\}$, M : X の全ての部分集合.

$A \in M$ に対し.

$\mu(A) = |A| \cdot \frac{1}{6}$ とするとこれは測度になる.

(3.) $X = \mathbb{R}$, M : D を含む最小の σ-集合体.

$p(x)$: $\mathbb{R}$ 上の関数, $\int_{\mathbb{R}} p(x)\,dx = 1$ とする.

$\mu(A) = \int_A p(x)\,dx$ とすると これは測度になる.

$\longrightarrow$ 測度は確率を拡張させたものでもある.

定義 2.5 (X, M_1, μ_1), (Y, M_2, μ_2) に対し.

$X \times Y$ 上の σ-集合体 M を. $M_1 \times M_2$ を含む最小の σ-集合体とし.

測度 μ を. $\mu(A_1 \times A_2) = \mu(A_1) \cdot \mu(A_2)$ を拡張させたものとする.

このとき. μ を $X \times Y$ の積測度 とよばれる.

例. $X = \{1, \cdots, 6\}$, $Y = \{1, \cdots, 6\}$, M_1, M_2, μ_1, μ_2 は前の例の通りとすると.

例えば. $\mu(\{1\} \times \{3\}) = \mu_1(\{1\}) \cdot \mu_2(\{3\}) = \frac{1}{36}$ となる.

$M \neq M_1 \times M_2$ にも注意.