ラッセルのパラドックス.

X を.自分自身を要素として含まない集合を全て集めた集合とする.すなわち

$X = \{ Y : \text{集合} \mid Y \notin Y \}$ である.

今. X 自身が X に含まれるかを考える

$X \ni X$ なら. X の定義 $Y \notin Y$ に矛盾.

$X \not\ni X$ なら X の定義から $X \ni X$ とならないといけないので矛盾.

同値関係.

定義1.8. X で関係 $\sim$ が次の3つをみたすとき.$\sim$ を同値関係という.

(1) $x \sim x$. $\qquad {}^\forall x, y, z \in X$.

(2) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$.

(3) $x \sim y$ かつ $y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

例1.1. $\mathbb{Z}$ において.

$x \sim y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x - y \in 3\mathbb{Z}$ とおくと.これは同値関係.

(:) まず. $x \in \mathbb{Z}$ は $3k, 3k+1, 3k+2$ のいずれかで表せる.

ここで $x = 3k + t,\ y = 3l + s$ $(t, s = 0, 1, 2)$ とすると.

$x - y = 3(k - l) + t - s$ なので.

$x - y \in 3\mathbb{Z} \Leftrightarrow t - s = 0$ となる.すなわち.同値になるのは.

3で割ったあまりが同じときである.

これを考えれば.定義の3条件をみたすことは明らか.

例2. $\mathbb{R}$ において不等号 $<, \leq$ を考えると.

$\leq$ は (1) と (3) をみたすが. (2) はみたさない.

$<$ は (3) のみ. みたす.

例3. 等号 $=$ も同値関係である.

定義1.9. 集合 X に同値関係 $\sim$ が入っているとする. このとき $^\forall x \in X$ に対し.

$[x] = \{y \in X \mid x \sim y\}$ を x の同値類といい.

x のことを, この同値類の代表元という.

例1. $\mathbb{Z}$ に $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in 3\mathbb{Z}$ という同値関係を入れると.

$[0] = \{0, \pm 3, \pm 6, \cdots\}$

$[1] = \{1, 1 \pm 3, 1 \pm 6, \cdots\}$ となる

また. $[1] = [4] = [7] = \cdots$ となる.

この代表元は. 1でも 4でも 7でもよい.

例2. 等号を考えると

$[x] = \{x\}$ となる.

命題1.10. $(X, \sim)$ を考える. $^\forall x, y \in X$ に対し.

(1) $[x] \ni x$.

(2) $x \sim y \Leftrightarrow [x] = [y]$

(3) $x \not\sim y \Rightarrow [x] \cap [y] = \emptyset$ が成り立つ.

$\because$ (1) は. $x \sim x$ よりわかる.

(2) $[x]=[y]\ni y$ より $x\sim y$ がわかる.

逆に $x\sim y$ なら.

$[x]\ni {}^\forall z$ に対し. $x\sim z$ より $y\sim z$ となり $[y]\ni z$ となる.

(3). もし $[x]\cap[y]\neq\phi$,

$\underset{z}{\Psi}$ とすると. $x\sim z, y\sim z$ となり $x\sim y$ が導かれ矛盾.

<u>定理1.11</u>. $(X,\sim)$ は.

$X=\bigcup_{x\in X}[x]$ と分解できる.

ここで. ${}^\exists Y\subset X$. s.t. $x,y\in Y$, $x\neq y\Rightarrow x\not\sim y$ かつ.

$X=\bigcup_{x\in Y}[x]$ とできる. ─ ☆

∵ 命題1.10から出るが. Yの存在には. Zornの補題がいる.

☆をXの類別ともいう.

<u>剰余類</u>.

ここでは特に. $\mathbb{Z}$ の同値関係

$x\sim y \Leftrightarrow x-y\in n\mathbb{Z}$ を考える.

ここで $x\sim y$ を.

$x\equiv y \pmod n$ とかく.

この同値関係で $\mathbb{Z}$ を類別すると.

$\mathbb{Z}=[0]\cup[1]\cup\cdots\cup[n-1]$ となる.

ここで. $[0],\cdots,[n-1]$ を nを法とする剰余類という.

定理1.12. $x \equiv x',\ y \equiv y' \pmod n$ とすると.

(1) $x+y \equiv x'+y' \pmod n$

(2) $x-y \equiv x'-y' \pmod n$

(3) $xy \equiv x'y' \pmod n$ が成り立つ.

∵. $x \equiv x'$ ということは. nで割ったあまりが同じということなので.

$x = nk+t,\ x' = nk'+t$

$y = nl+s,\ y' = nl'+s$ として示せばよい. (3)だけやると.

$xy = (nk+t)(nl+s) = n\cdot p + ts$

$x'y' = (nk'+t)(nl'+s) = n\cdot p' + ts$ より $xy \equiv x'y'$ となる //

注. 割り算は 定理1.12 をみたさないことに注意.

定理1.12 から. 次が定義できる.

定義1.13.

剰余類 $[0], \cdots, [n-1]$ に対し. 和,差,積を.

$[k]+[l] = [k+l]$

$[k]-[l] = [k-l]$

$[k]\cdot[l] = [kl]$ で定義する. このとき $\mathbb{Z}_n = \{[0], \cdots, [n-1]\}$ で表す.

この計算が代表元によらないことに注意.

一般に. 演算や写像が. 代表元によらないとき. well-defined であるという.

例. $\mathbb{Z}_5$ において. $f: \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$ を

$f(k) = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ とすると. これは well-defined ではない.