線形代数学 II　平成 29 年度前期　期末試験問題

注意：解答の順番は問わないが，どの問題を解いているか分かるように書くこと．

・解答の書き方により，記載の配点とは別に，最大で 5 点の加点または減点をすることがある．

・解答用紙には 2 枚とも記名し，2 枚目を 1 枚目に挟んで提出すること．

1. $\mathbb{C}^3$ において，ベクトル $v = (1,2,3)$ が $u = (2,1,5)$ と $w = (1,0,a)$ によって生成される部分空間に入るための a の条件を求めよ．(10 点)

2. 次の $\mathbb{C}^3$ のベクトルの組が基底であることを示せ．(12 点)

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. $\mathbb{C}^4$ において，W_1 と W_2 を以下で定めるとき，$W_1, W_2, W_1 \cap W_2, W_1 + W_2$ の次元をそれぞれ求めよ．(12 点)

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{C}^4 \,|\, x + 2y + z + 2w = 0, x + y + z = 0\right\} \\ W_2 &= \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{C}^4 \,|\, x + y + z + w = 0, 2y - w = 0, z = 0\right\} \end{aligned}$$

4. $\mathbb{C}^3$ の二つの基底

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

について，$\{u_1, u_2, u_3\}$ から $\{v_1, v_2, v_3\}$ への基底の変換行列を求めよ．(12 点)

5. 次のベクトルの組から，グラムシュミットの直交化法を用い，正規直交基底を作れ．(12 点)

$$v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

6. 対称行列であり，かつ直交行列である 2×2 行列を 1 つ挙げよ．(証明は書かなくてよい．2 点)

7. 次の行列 A が，対角化不可能であることを示せ．(10 点)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

8. 次の行列 B を以下の順序で対角化せよ．(30 点)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 B の固有値を求めよ．

(2) 各固有値に属する固有空間を，$\langle v, w \rangle$ の形で表せ．

(3) 行列 B が対角化可能であることを示せ．

(4) B を対角化する行列 P と，その逆行列 P^{-1} を求めよ．

(5) $P^{-1}BP$ を計算せよ．(この問題は計算過程を書かなくてもよい．)