解答例

1. $t\begin{bmatrix}2\\1\\5\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}1\\0\\a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ とすると $\begin{bmatrix}2&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t\\s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ より計算すると

$$\left[\begin{array}{cc|c}2&1&1\\1&0&2\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{cc|c}1&0&2\\2&1&1\end{array}\right]\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}$$ となる

$\therefore\begin{cases}t=2\\s=-3\end{cases}$ $\therefore\ 2\cdot5-3a=3$ $\therefore\ a=\dfrac{7}{3}$

2. $A=[v_1\,v_2\,v_3]=\begin{bmatrix}1&3&1\\1&2&0\\1&1&1\end{bmatrix}$ とし、rank$A$ を求めると、

$$\mathrm{rank}\,A=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}1&3&1\\1&2&0\\1&1&1\end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}1&3&1\\0&-1&-1\\0&-2&0\end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}1&3&1\\0&-1&-1\\0&0&2\end{bmatrix}=3$$

$\therefore$ ベクトルの数と rank$A$ が等しいので1次独立

$\dim\mathbb{C}^3=3$ より 3つの1次独立なベクトルは基底となる.
$\therefore\ v_1, v_2, v_3$ は基底である.

3. W_1 を求めるため 条件の連立方程式を解く. 係数行列の階数は、

$$\begin{bmatrix}1&2&1&2\\1&1&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&-1&0&-2\end{bmatrix}$$ より 2である. ∴自由度 2なので

$x=t,\ w=s$ とすれば. $y=-2w=-2s$, $z=-x-y=-t+2s$ より

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\\-2s\\-t+2s\\s\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}0\\-2\\2\\1\end{bmatrix}$$ となり $W_1=\left\langle\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-2\\2\\1\end{bmatrix}\right\rangle$.

ここで $\mathrm{rank}\begin{bmatrix}1&0\\0&-2\\-1&2\\0&1\end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}1&0\\0&-2\\0&0\\0&0\end{bmatrix}=2$ より、$\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}0\\-2\\2\\1\end{bmatrix}$ は1次独立。

$\therefore$ W_1 の基底となり、$\dim W_1=2$.

次に W_2 の条件式を解くと、係数行列は

$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&-1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$ より rank3。$\therefore$ 自由度1.なので $y=t$ とすれば、

$w=2y=2t$, $x=-y-z-w=-3t$

$\therefore$ $\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3t\\t\\0\\2t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}-3\\1\\0\\2\end{bmatrix}$ $\therefore$ $W_2=\left\langle\begin{bmatrix}-3\\1\\0\\2\end{bmatrix}\right\rangle$ $\therefore$ $\dim W_2=1$.

$W_1\cap W_2$ の条件式の係数行列は

$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&-1\\0&0&1&0\\1&1&1&0\\1&2&1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ より rank4 $\therefore$ $W_1\cap W_2=\{0\}$

$\therefore$ $\dim W_1\cap W_2=0$

これより $\dim(W_1+W_2)=2+1-0=3$ である

4. 基底の変換行列 P は

$[v_1\ v_2\ v_3]=[u_1\ u_2\ u_3]P$ より

$$P=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&3&1\\1&5&-1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}.$$

ここで $\begin{vmatrix}2&1&0\\0&3&1\\1&5&-1\end{vmatrix}=-6+1-10=-15$ と余因子行列から.

$$\begin{bmatrix}2&1&0\\0&3&1\\1&5&-1\end{bmatrix}^{-1}=-\frac{1}{15}\begin{bmatrix}-8&1&1\\1&-2&-2\\-3&-9&6\end{bmatrix}$$

$\therefore\ P=-\frac{1}{15}\begin{bmatrix}-8&1&1\\1&-2&-2\\-3&-9&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}=-\frac{1}{15}\begin{bmatrix}-6&-8&-8\\-3&1&1\\-6&12&-18\end{bmatrix}$ である

5. $\|v_1\|=3$ より $y_1=\frac{1}{3}v_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

$\tilde{y}_2=v_2-(y_1,v_2)y_1=\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}-1\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\3\\0\end{bmatrix}$, $\|\tilde{y}_2\|=3$, $y_2=\frac{1}{3}\tilde{y}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$

$\tilde{y}_3=v_3-(y_1,v_3)y_1-(y_2,v_3)y_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}-1\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}-(-1)\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}$

$\|\tilde{y}_3\|=1$ より $y_3=\tilde{y}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}$ など

7. $\varphi_A(t)=|tE-A|=\begin{vmatrix} t-1 & -1 & 0 \\ 0 & t-2 & -1 \\ 0 & 0 & t-2 \end{vmatrix}=(t-1)(t-2)^2$ より固有値は 1 と 2

ここで $\dim V(2)$ を求めると.

$$\dim V(2)=3-\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=3-2=1$$ で重複度と一致しない.

∴ 対角化不可能である

8 (1) $\varphi_B(t)=\begin{vmatrix} t-1 & -2 & 0 \\ -2 & t-3 & -2 \\ 0 & -2 & t-1 \end{vmatrix}=(t-1)^2(t-3)-8(t-1)$

$$=(t-1)(t^2-4t+3-8)=(t-1)(t+1)(t-5)$$

∴ 固有値は $1, 5, -1$ である

(2) $V(1)$ を求める.. $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=0$ の係数行列の rank は,

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ より 2 である ∴ 自由度 1.

$x=t$ とすると. $y=0$, $z=-t$ より

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t \\ 0 \\ -t \end{bmatrix}=t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \therefore V(1)=\left\langle\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right\rangle$$

$V(-1)$ を求める. $\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=0$ の係数行列の rank は

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ より 2. ∴ 自由度 1.

$x = t$ とおくと. $y = -t$, $z = t$ より

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \therefore V(-1) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$V(5)$ を求める. $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ の係数行列 の rank は.

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ より 2 ∴ 自由度 1

$x = t$ とおくと. $y = 2t$, $z = t$ より

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 2t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \therefore V(5) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

(3) 対称行列なので対角化可能.

(4) $P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$ であり $P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ である

(5) $P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ である.