基底と次元

<u>定義4.5</u>. $v_1, \cdots, v_k \in V$ が次の条件をみたすとき.

ベクトルの組 $v_1, \cdots, v_k$ を 1次独立 であるという.

条件: $r_1, \cdots, r_k \in \mathbb{R}$ に対し.

$$r_1 v_1 + r_2 v_2 + \cdots + r_k v_k = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = \cdots = r_k = 0.$$

また. 1次独立でないときは 1次従属 であるという.

<u>例</u> 11 (1) $r\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = 0$ とすると $\begin{cases} r+s=0 \\ r+2s=0 \end{cases}$ $\therefore r=s=0$.

$\therefore$ これは 1次独立.

(2) $r\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = 0$ とする. ここで例えば $r=2, s=-1, t=-1$ とすると.

$2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = 0$ となり上の等式をみたす $\therefore$ 1次従属である

問 11 (3) (4) (5)

<u>$\mathbb{R}^n$ のベクトルが1次独立になる条件</u>.

$\mathbb{R}^n \ni v_1 = \begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{bmatrix}, \cdots, v_k = \begin{bmatrix}a_{1k}\\a_{2k}\\\vdots\\a_{nk}\end{bmatrix}$ が1次独立になる条件を考える.

$$r_1 v_1 + r_2 v_2 + \cdots + r_k v_k = \begin{bmatrix} r_1 a_{11} + r_2 a_{12} + \cdots + r_k a_{1k} \\ r_1 a_{21} + r_2 a_{22} + \cdots + r_k a_{2k} \\ \vdots \\ r_1 a_{n1} + r_2 a_{n2} + \cdots + r_k a_{nk} \end{bmatrix}$$

x とおく.

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_k \end{bmatrix}}_{x} = Ax$$

とできることから．条件式 $r_1 v_1 + \cdots + r_k v_k = 0$ は $Ax = 0$ とかける．

つまりこの連立方程式 $Ax = 0$ が

自明な解 0 のみをもつ $\Rightarrow$ 1次独立

それ以外の解をもつ $\Rightarrow$ 1次従属 である．

これと命題2.9より次を得る．

定理4.4. $v_1, \cdots, v_k \in \mathbb{R}^n$ が1次独立である必要十分条件は．

$A = [v_1 \cdots v_k]$ とするとき． $\operatorname{rank} A = k$ である．

系4.5. $v_1, \cdots, v_k \in \mathbb{R}^n$ が1次従属である必要十分条件は．

$\operatorname{rank} A < k$ である．

系4.6. (1) $k > n$ ならば．$v_1, \cdots, v_k$ はつねに1次従属．

(2) 次は互いに同値．

(a) $v_1, \cdots, v_n$ は1次独立．　(b) $\operatorname{rank} A = n$．

(c) $|A| \neq 0$　(d) A は正則行列．

例1(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ とすると $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$ となるので1次独立

(2) 系4.6(1)より 1次従属．

問1(3)(4)(5)．

命題4.7. Vにおいて次が成り立つ.

(1) $v_1, \cdots, v_n$が1次独立なら. $^\forall k \leqq n$に対し.

$v_1, \cdots, v_k$が1次独立.

(2) $v_1, \cdots, v_n$が1次従属なら. $^\forall u \in V$に対し.

$v_1, \cdots, v_n, u$が1次従属.

(3) $v_1, \cdots, v_n$が1次独立, $v_1, \cdots, v_n, u$が1次従属なら.

uは$v_1, \cdots, v_n$の1次結合でかける. (さらにその表し方は一意)

∵(1) $r_1 v_1 + \cdots + r_k v_k = 0$とすると.

$r_1 v_1 + \cdots + r_k v_k + 0 \cdot v_{k+1} + \cdots + 0 v_n = 0$より $r_1 = \cdots = r_k = 0$となる.

(2). $r_1, \cdots, r_n$を. $r_1 v_1 + \cdots + r_n v_n = 0$の自明でない解とすると.

$r_1 v_1 + \cdots + r_n v_n + 0 \cdot u = 0$となる ∴ 1次従属.

(3). $r_1, \cdots, r_n, s$を $r_1 v_1 + \cdots + r_n v_n + s u = 0$の自明でない解とする.

$s = 0$なら. $r_1 = \cdots = r_n = 0$でないといけないから. $s \neq 0$である

$$\therefore\ u = -\frac{r_1}{s} v_1 - \frac{r_2}{s} v_2 - \cdots - \frac{r_n}{s} v_n$$ となる. (一意性は省略).