直交変換と対称変換

<u>定義</u>. $n \times n$ 行列 A は.

${}^tA\,A = E_n$ をみたすとき, 直交行列.

$A = {}^tA$ をみたすとき, 対称行列 という.

<u>補題</u> $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ に対し.

$(Ax, y) = (x, {}^tAy)$ である

∵

$$(Ax, y) = \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right)$$

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$

$$\begin{aligned} = & \ y_1 a_{11} x_1 + y_1 a_{12} x_2 + \cdots + y_1 a_{1n} x_n \\ & + y_2 a_{21} x_1 + y_2 a_{22} x_2 + \cdots + y_2 a_{2n} x_n \\ & \ \vdots \\ & + y_n a_{n1} x_1 + y_n a_{n2} x_2 + \cdots + y_n a_{nn} x_n \end{aligned} = \sum_{i,j=1}^{n} y_i a_{ij} x_j$$ である

同様に. $(x, {}^tAy) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i ({}^tA)_{ij} \cdot y_j = \sum_{i,j=1}^{n} x_i a_{ji} y_j$ となり

$(Ax, y) = (x, {}^tAy)$ がわかった.

<u>定理 4.25</u>. 次は同値.

(1) A は直交行列

(2) $\forall x \in \mathbb{R}^n$ に対し. $\|Ax\| = \|x\|$

(3) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ に対し. $(Ax, Ay) = (x, y)$

(つづく)

(4) $A=[a_1\ a_2 \cdots a_n]$ と表すと. $a_1,\cdots,a_n$ は正規直交基底.

∵ (1) ⇒ (2).

$$\|Ax\|^2=(Ax,Ax)=(x,{}^tAAx)=(x,x)=\|x\|^2.$$

(2) ⇒ (3)

$$(A(x+y),A(x+y))=(Ax+Ay,\ Ax+Ay)=(Ax,\ Ax+Ay)+(Ay,\ Ax+Ay)$$
$$=(Ax,Ax)+2(Ax,Ay)+(Ay,Ay)$$
$$(x+y,\ x+y)=(x,x)+2(x,y)+(y,y)$$

より $(x,y)=(Ax,Ay)$ がわかる.

(3) ⇒ (4)

$$Ae_i=\begin{array}{c}\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n}\\ & & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\\ \begin{array}{ccccc}\uparrow\ \ & & \uparrow & & \ \ \uparrow\\ a_1\ \ & & a_i & & \ \ a_n\end{array}\end{array}\begin{array}{c}\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ \\ <i\\ \\ \\ \end{array}=\begin{bmatrix}a_{1i}\\ a_{2i}\\ \vdots\\ a_{ni}\end{bmatrix}=a_i$$ である.

今. $(a_i,a_j)=(Ae_i,Ae_j)=(e_i,e_j)=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$ よりわかる

(4) ⇒ (1) ${}^tA=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\ \vdots & & & \\ a_{1j} & a_{2j} & \cdots & a_{nj}\\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$ より ${}^tAA$ の(j,i)成分は.

$$a_{1j}a_{1i}+a_{2j}a_{2i}+\cdots+a_{nj}a_{ni}=(a_j,a_i)$$ となる

∴対角成分($i=j$のとき)は1, その他は0となり単位行列になる.

定理 4.26. 次は同値.

(1) Aは対称行列

(2) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ に対し. $(Ax, y) = (x, Ay)$

∵ (1) ⇒ (2).

$(Ax, y) = (x, {}^tAy) = (x, Ay)$ である

(2) ⇒ (1)

$(Ax, y) = (x, Ay) = ({}^tAx, y)$ であるが. ここで $x = e_i$, $y = e_j$ とすれば.

$$(Ae_i, e_j) = \left(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} < i , \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} < j \right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} < j \right) = a_{ji}$$ となる

∴ $a_{ji} = ({}^tA)_{ji} = a_{ij}$ となり, $A = {}^tA$ がわかる.

例 7 (1) $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = E_n$ よりわかる

問 7 (2), (3), 8. (別解で解いてます)

定義. Vを内積空間, $f: V \to V$とする

(1) $\forall x, y \in V$ に対し. $(f(x), f(y)) = (x, y)$ をみたすとき. fを直交変換

(2) $(f(x), y) = (x, f(y))$ をみたすとき. fを対称変換 という