集合論の基礎

定義1.1. ものの集まりを集合といい. その個々の「もの」を集合の元あるいは要素という.

xが集合Xの元であることを $x \in X$ で表す.

例. (1) 整数全体の集合を$\mathbb{Z}$で表す. このとき.

$\mathbb{Z} \ni 1$, $\mathbb{Z} \ni -3$, $\mathbb{Z} \not\ni \frac{1}{2}$ などとかける.

(2). 日本人男性の集合をXとすると.

$X \ni$ 大野 などとできる.

(3). 集合の表し方はいろいろあるが, $\{\ \}$ がよく用いられる.

例えば. 偶数全体の集合は.

$\{$偶数全部$\} = \{0, \pm 2, \pm 4, \cdots\}$.

$= \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

右の条件をみたすような, 左のもの 全部 を表す集合

$= 2\mathbb{Z}$ などで表される.

(4) 空集合

(5) $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

定義1.2. 集合Xのすべての元が集合Yの元であるとき. XはYに含まれるといい.

$X \subset Y$ で表す.

また. 集合X、Yの和, 差, 積を.

$X \cup Y = \{x \mid x \in X$ または $x \in Y\}$.

$X \setminus Y = \{x \mid x \in X$ かつ $x \notin Y\}$

$X \cap Y = \{x \mid x \in X$ かつ $x \in Y\}$ で表す. (全体集合はΩとしておく)

さらに補集合を

$X^c = \{x \mid x \notin X\}$ で表す. これらは図で書くと理解しやすい.

定義1.3 集合X、Y に対し. 直積を.

$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$ で定義する.

直積は XとYの組を表している.

定義1.4

集合Xの各元に. 集合Yの元が1つだけ対応しているとき,

この対応を. XからYへの写像といい.

$$\begin{array}{cccc} f: & X & \longrightarrow & Y \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$ とかく.

ここで Xを定義域, Y または $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ を値域という.

例 (1) 実数上の関数

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$ は写像である.

(2). 大学生の集合 X と大学の集合Yに対し. $f: X \longrightarrow Y$ を.

通っている大学を対応させるものとするとこれは写像になる.

なおこの逆 $g: Y \longrightarrow X$ は写像にならない.

(3) たし算やかけ算も写像である.

$$\begin{array}{cccc} + : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & (x, y) & \longmapsto & x+y \end{array}$$ とできる.

定義1.5. 写像 $f: X \longrightarrow Y$ が次をみたすとき，それぞれ単射，全射という.

単射：$x_1, x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

全射：$\forall y \in Y$ に対して，$\exists x \in X$. s.t. $f(x) = y$

任意の という記号.　存在という記号

全射かつ単射のとき，全単射という.

例. (1). $\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ は全射でも単射でもない.

(2) $\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ は全単射.

(3). $\begin{array}{rcl} +: \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (x, y) & \longmapsto & x+y \end{array}$ は全射だが単射ではない.

(4) $\begin{array}{rcl} f: \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ は単射だが全射ではない.

定義1.6. $f: X \rightarrow Y,\ g: Y \rightarrow Z$ のとき.

$\begin{array}{rcl} g \circ f: X & \longrightarrow & Z \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$ を f と g の合成という.

また，$f: X \longrightarrow Y$ が全単射のときは，その逆写像.

$\begin{array}{rcl} f^{-1}: Y & \longrightarrow & X \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ f(x) & \longmapsto & x \end{array}$ が定義できる.

<u>濃度</u>. 集合 X の元の個数を考える. 個数が有限個なら数えればよいが,
無限個の場合はどうすればいいか.

<u>定義 1.7.</u> 集合 X から
$\{1, 2, \cdots, n\}$ への全単射があるとき. X の濃度は n であるといい. $|X| = n$ とかく.
$\mathbb{N}$ への全単射があるとき, X は可算無限濃度といい $|X| = \aleph_0$ とかく.
それ以外のときは, X は非可算無限濃度という.

<u>例</u>. (1). アルファベットの集合 X は $|X| = 26$ である.

(2). $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$ である.

∵ $\mathbb{N}$ から $\mathbb{Z}$ への全単射を作る.

$$f(n) = \begin{cases} 0 & (n = 1) \\ \frac{n}{2} & (n \geq 2, \text{偶数}) \\ -\frac{n-1}{2} & (n \geq 3, \text{奇数}) \end{cases}$$ とすればよい.

(3) $\mathbb{R}$ は非可算である.

∵ かんたんのため, $[0, 1]$ が非可算を示す.
まず $|[0, 1]| = \aleph_0$ と仮定し.
全単射 $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0, 1]$ が存在するとする.
ここで. $f(n)$ を小数で表し.

$f(1) = 0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots$

$f(2) = 0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots$ としていく.

ここで b_i を $a_{ii} \neq b_i$ をみたす数とし.

$b = 0.b_1 b_2 b_3 \cdots \in [0,1]$ とする.

ここで $b_i \neq a_{ii}$ なので $f(i) \neq b$ となる.

これは f が全射であることに矛盾する.

$\therefore |[0,1]| \neq \aleph_0$ である.