確率・統計 解答例

1. $P(A)$, $P(B)$, $P(A\cap B)$ を求めると、

$$P(A)=\frac{3}{10},\quad P(B)=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}+\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{3}{10},\quad P(A\cap B)=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}=\frac{1}{15}$$

より、$P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{\frac{1}{15}}{\frac{3}{10}}=\dfrac{2}{9}$ である。

$P(B)\neq P(B|A)$ なので独立でない。

2. 事象A、B、Cをとり出したクッキーがX、Y、Zさんのもの、とし

事象Eをとり出したクッキーが割れている、とする。ベイズの定理から、

$$P(A|E)=\frac{P(E|A)\cdot P(A)}{P(E|A)\cdot P(A)+P(E|B)\cdot P(B)+P(E|C)\cdot P(C)}$$

$$=\frac{0.08\times0.35}{0.08\times0.35+0.05\times0.4+0.3\times0.25}=\frac{56}{111}$$ である。

3. (1) $\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+p=1$ より、$p=\frac{1}{24}$

(2) $E(X)=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\frac{1}{24}=\frac{1}{2}+1+\frac{1}{6}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$

(3) $V(X)=E(X^2)+E(X)^2=0^2\cdot\frac{1}{8}+1^2\cdot\frac{1}{2}+3^2\cdot\frac{1}{3}+4^2\cdot\frac{1}{24}-\left(\frac{5}{3}\right)^2$

$=\frac{1}{2}+3+\frac{2}{3}-\frac{25}{9}=\frac{25}{18}$ である。 $\sigma(X)=\frac{5}{3\sqrt{2}}$ である

4. $p_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)\,dy$ であるので、

$0\leq x<1$ のとき

$p_1(x)=\int_0^1 3(x^2y+xy^2)\,dy=\frac{3}{2}x^2+x$ であり、

No.

$0 \leq x < 1$ 以外のとき

$p_1(x) = 0$ である．同様に．

$0 \leq y < 1$ のとき

$p_2(y) = \int_0^1 3(x^2y + xy^2)\,dx = y + \frac{3}{2}y^2$

$0 \leq y < 1$ 以外のとき

$p_2(y) = 0$ となる．

$p(x, y) \neq p_1(x) \cdot p_2(y)$ なので．XとYは独立でない．

5. X は $B(100, \frac{1}{2})$ に従うとする．

$E(X) = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$，$V(X) = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 25$ より

Y を $N(50, 25)$ に従うとする．また $Z = \frac{Y-50}{5}$ とおくと．

$P(X \geq 60) = P(Y \geq 59.5) = P(Z \geq \frac{1}{5}(59.5-50))$

$= P(Z \geq 1.9) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1.9) = 0.5 - 0.4713 = 0.0287$ となる．

6. $\bar{X}$ を標本平均とすると

$\bar{X}$ は $N(\mu, \frac{1}{50} \cdot 25) = N(\mu, \frac{1}{2})$ に従い．

$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2}(\bar{X} - \mu)$ は $N(0, 1)$ に従う．ここで．

$P(\bar{X} - \delta \leq \mu \leq \bar{X} + \delta) = 0.99$ となる δ を求めると．

$P(\bar{X} - \delta \leq \mu \leq \bar{X} + \delta) = P(\mu - \delta \leq \bar{X} \leq \mu + \delta)$

$= P(-\sqrt{2}\delta \leq Z \leq \sqrt{2}\delta) = 2P(0 \leq Z \leq \sqrt{2}\delta) = 0.99$ より

No.

$P(0 \leq Z \leq \sqrt{2}\delta) = 0.495$ となり

$\sqrt{2}\delta = 2.5758$ なので　$\delta \fallingdotseq 1.8$　となる.

∴平均身長の99%信頼区間は　$168.0 \leq \mu \leq 171.6$　となる

6. (1) H_0 : 1の目が出る確率 $p = \frac{1}{6}$

(2) H_1 : $p > \frac{1}{6}$

(3). $\overline{X}$ を 180回投げたときの1の目が出る割合とすると. $\overline{X}$ はほぼ

$N(p, \frac{1}{180} \cdot p(1-p)) = N(\frac{1}{6}, \frac{1}{180} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}) = N(\frac{1}{6}, \frac{1}{6^4})$ に従う.

$Z = \dfrac{\overline{X} - \frac{1}{6}}{\frac{1}{6^2}} = 6^2(\overline{X} - \frac{1}{6})$ は $N(0,1)$ に従う.

これを検定統計量とする.

(4). $P(Z > \theta(0.01)) = 0.01$ となる $\theta(0.01)$ を求めると.

$P(0 \leq Z < \theta(0.01)) = \frac{1}{2} - 0.01 = 0.49$ より

$\theta(0.01) = 2.3263$　となる.　∴棄却域は　$Z > 2.3263$　である

(5) Zの実現値は

$6^2(\frac{43}{180} - \frac{1}{6}) = 6^2 \cdot \frac{13}{180} = \frac{13}{5} = 2.6$　である

(6) 2.6は棄却域に入っているので

H_0は有意水準1%で棄却される.