応用数学II 解答例

1(1) $f(x)$は偶関数なので $b_n=0$. また.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\pi^2=\pi.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}x\sin nx\right]_0^{\pi}-\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx=-\frac{2}{\pi n}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right)$$ である

$$\therefore f(x)\sim\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right)\cos nx$$ である.

(2) 両辺に 0 を代入すれば

$$0=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2n-1)^2}(-2)$$ より

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$ である

2. $c_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x-2\,dx=-2$ である.また $n\neq0$ のとき

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x-2)e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{in}(x-2)e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{2\pi in}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-inx}dx$$

$$=-\frac{1}{2\pi in}(-1)^n\left((\pi-2)-(-\pi-2)\right)+\frac{1}{2\pi n^2}\left[e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{i}{n}(-1)^n$$ である

$$\therefore f(x)\sim-2+\sum_{n\neq0}\frac{i}{n}(-1)^n e^{inx}$$ である.

3. $$\hat{f}(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-iut}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}e^{-t}\cdot e^{-iut}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}e^{(-1-iu)t}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{1}{1+iu}e^{(-1-iu)t}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{1+iu}$$

No.

4. $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (5, -1, -3)$

$|\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 12 - 4 - 2 = 7.$ である

5. (1) $\mathbf{r}'(t) = (-4\sin t, 4\cos t, 3)$ より.

$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(-4\sin t)^2 + (4\cos t)^2 + 3^2} = 5$ である

$\therefore S(t) = \int_0^t |\mathbf{r}'(t)|\, dt = \int_0^t 5\, dt = 5t$ となる.

$\therefore \mathbf{r}(S) = \left(4\cos\frac{S}{5}, 4\sin\frac{S}{5}, \frac{3}{5}S\right)$ である

(2) $\mathbf{e}_1(S) = \mathbf{r}'(S) = \left(-\frac{4}{5}\sin\frac{S}{5}, \frac{4}{5}\cos\frac{S}{5}, \frac{3}{5}\right)$

$\mathbf{r}''(S) = \left(-\frac{4}{25}\cos\frac{S}{5}, -\frac{4}{25}\sin\frac{S}{5}, 0\right)$ より

$\kappa(S) = |\mathbf{r}''(S)| = \frac{4}{25}\sqrt{\cos^2\frac{S}{5} + \sin^2\frac{S}{5}} = \frac{4}{25}$ となる

$\therefore \mathbf{e}_2(S) = \frac{\mathbf{r}''(S)}{\kappa(S)} = \left(-\cos\frac{S}{5}, -\sin\frac{S}{5}, 0\right)$ である.

$\mathbf{e}_3(S) = \mathbf{e}_1(S)\times\mathbf{e}_2(S)$

$= \left(-\frac{3}{5}\cdot -\sin\frac{S}{5}, \frac{3}{5}\cdot -\cos\frac{S}{5}, \frac{4}{5}\sin^2\frac{S}{5} + \frac{4}{5}\cos^2\frac{S}{5}\right)$

$= \left(\frac{3}{5}\sin\frac{S}{5}, -\frac{3}{5}\cos\frac{S}{5}, \frac{4}{5}\right)$ である.

6. $\mathbf{r}_u = (\cos u\cos v, \cos u\sin v, -\sin u)$

$\mathbf{r}_v = (-\sin u\cdot\sin v, \sin u\cos v, 0)$ より

No.

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (\sin^2 u\cos v,\ \sin^2 u\sin v,\ \cos u\sin u\cos^2 v + \cos u\sin u\sin^2 v)$$

$$= (\sin^2 u\cos v,\ \sin^2 u\sin v,\ \cos u\sin u)$$ となる. よって

$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sin u\sqrt{\sin^2 u\cos^2 v + \sin^2 u\sin^2 v + \cos^2 u} = \sin u$ である. これより曲面積は

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin u\, dv\, du = 2\pi\int_0^{\pi}\sin u\, du = 2\pi\cdot\left[-\cos u\right]_0^{\pi} = 4\pi$$ である.

7. $\mathrm{div}\,\mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial x}y^2 z + \frac{\partial}{\partial y}xz^2 + \frac{\partial}{\partial z}x^2 y = 0$

$\mathrm{rot}\,\mathbf{a} = \left(\frac{\partial}{\partial y}x^2 y - \frac{\partial}{\partial z}xz^2,\ \frac{\partial}{\partial z}y^2 z - \frac{\partial}{\partial x}x^2 y,\ \frac{\partial}{\partial x}xz^2 - \frac{\partial}{\partial y}y^2 z\right)$

$= (x^2 - 2xz,\ y^2 - 2xy,\ z^2 - 2yz)$ である