2階非同次線形微分方程式.

(☆)… $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$

のR(x)を0でおきかえた方程式

(†)… $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ を.もとの方程式の補助方程式という.

また(†)の解 y_1, y_2 （$\frac{y_1}{y_2}$ は定数でない）を基本解という.

$R(x) \neq 0$ のとき，☆は非同次といい. R(x)を非同次項という.

<u>定理 1.3.4.</u> y_0 を☆の1つの解. y_1, y_2 を基本解とすると.

☆の任意の解は.

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_0$ で与えられる

∵ y を☆の任意の解とすると. y_0 も☆の解なので.

$$
\begin{array}{rl}
 & y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \\
-) & \underline{y_0'' + P(x)y_0' + Q(x)y_0 = R(x)} \\
 & (y-y_0)'' + P(x)(y-y_0)' + Q(x)(y-y_0) = 0
\end{array}
$$

となり.

$y - y_0$ が(†)の解となる. よって定理1.3.3より

$y - y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2$ となる

//

以下では定数係数の方程式を取り扱うが.この定理より.基本解と.1つの特殊解がわかれば.方程式が解ける.基本解の求め方はすでに勉強したので.1つの特殊解が求まればよい.

以下. R(x)の形から特殊解を予想し求める未定係数法を解説する.

未定係数法

$R(x)$の形から特殊解を予想し導く.

(a) $R(x)$ が m 次の多項式のとき、特殊解を

$$y_0 = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m$$ と予想する.

ただし基本解が定数関係を含むときは. xy_0 を推測特殊解とする.

例. $y'' - 2y' + 2y = x^2 - 1$ を解け

答. 特性方程式は $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ より $\lambda = 1 \pm i$ となる

∴ 基本解は $e^x \cos x$, $e^x \sin x$ である.

次に推測特殊解を.

$y_0 = a_0x^2 + a_1x + a_2$ とおくと.

$y_0'' - 2y_0' + 2y_0 = x^2 - 1$ より.

$2a_0 - 2(2a_0x + a_1) + 2(a_0x^2 + a_1x + a_2) = x^2 - 1$

$2a_0x^2 + (-4a_0 + 2a_1)x + 2a_0 - 2a_1 + 2a_2 = x^2 - 1$ となり

$\begin{cases} 2a_0 = 1 \\ -4a_0 + 2a_1 = 0 \\ 2a_0 - 2a_1 + 2a_2 = -1 \end{cases}$ となる これより $\begin{cases} a_0 = \frac{1}{2} \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \end{cases}$ となるので.

1つの特殊解は $y_0 = \frac{1}{2}x^2 + x$ である

∴ 一般解は

$$y = C_1 \cdot e^x \cos x + C_2 \cdot e^x \sin x + \frac{1}{2}x^2 + x$$ である.

問 次を解け.

(1) $y''-3y'+2y=2x^2-6x+6$

(2) $y''-2y'=16x-8$.

(3) $y''-2y'+5y=5x^2$.

答 (1) 特性方程式は $\lambda^2-3\lambda+2=0$ より $\lambda=1,2$.

∴基本解は e^x, e^{2x}.

推測特殊解を $y_0=a_0x^2+a_1x+a_2$ とおくと.

$2a_0-3(2a_0x+a_1)+2(a_0x^2+a_1x+a_2)=2x^2-6x+6$ より

$\begin{cases} 2a_0=2 \\ -6a_0+2a_1=-6 \\ 2a_0-3a_1+2a_2=6 \end{cases}$ より $\begin{cases} a_0=1 \\ a_1=0 \\ a_2=2 \end{cases}$ となり

$y_0=x^2+2$ が特殊解. よって一般解は.

$y=c_1e^x+c_2e^{2x}+x^2+2$ である

(2) 特性方程式 $\lambda^2-2\lambda=0$ より $\lambda=0,2$.

∴基本解は $1, e^{2x}$.

$y_0=a_0x^2+a_1x$ とおくと.

$2a_0-2(2a_0x+a_1)=16x-8$ より $a_0=-4, a_1=0$

∴ $y=c_1+c_2e^{2x}-4x^2$ が一般解.

(3) 特性方程式 $\lambda^2-2\lambda+5=0$ より $\lambda=1\pm 2i$ ∴ $e^x\cos 2x, e^x\sin 2x$ が基本解.

$y_0=a_0x^2+a_1x+a_2$ とおくと. $2a_0-2(2a_0x+a_1)+5(a_0x^2+a_1x+a_2)=5x^2$ より

$a_0=1, a_1=\frac{4}{5}, a_2=-\frac{2}{25}$ となり. $y=c_1e^x\cos 2x+c_2e^x\sin 2x+x^2+\frac{4}{5}x-\frac{2}{25}$ となる.

(b) $R(x)=k\cdot e^{\mu x}$ のとき．特殊解を．

$y_0=a\cdot e^{\mu x}$ と推測する．

例．$y''-4y'+4y=3e^{-x}$ を解け．

答．基本解は．$e^{2x},\ xe^{2x}$．

推測特殊解を．$a\cdot e^{-x}$ とすると．

$ae^{-x}+4ae^{-x}+4ae^{-x}=3e^{-x}$ より $a=\frac{1}{3}$．

∴ $y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+\frac{1}{3}e^{-x}$ が一般解

(c) $R(x)=k\sin\nu x+l\cos\nu x$ のとき．特殊解を

$y_0=a\sin\nu x+b\cos\nu x$ と推測する

例．$y''-3y'=10\sin x$ を解け．

答．基本解は $1,\ e^{3x}$

推測特殊解を $a\sin x+b\cos x$ とすると．

$-a\sin x-b\cos x-3(a\cos x-b\sin x)=10\sin x$ より

$a=-1,\ b=3$ となる

∴ $y=C_1+C_2e^{3x}-\sin x+3\cos x$ が一般解．

問．次を解け

(1) $y''+4y'+4y=9e^{x}$．

(2) $y''+4y'+5y=4(\sin x+\cos x)$

(3) $y''-8y'+12y=2e^{3x}$．

答 (1) 基本解は e^{-2x}, xe^{-2x} である

$y_0 = ae^x$ とおくと. $ae^x + 4ae^x + 4ae^x = 9e^x$ より $a = 1$

$\therefore y = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + e^x$ である

(2) 基本解は $e^{2x}\cos x, e^{2x}\sin x$ である.

$y_0 = a\cos x + b\sin x$ とおくと.

$-a\cos x - b\sin x + 4(-a\sin x + b\cos x) + 5(a\cos x + b\sin x)$
$= 4(\sin x + \cos x)$ より

$a = 0, b = 1$ となる

$\therefore y = c_1e^{2x}\cos x + c_2e^{2x}\sin x + \sin x$ となる

(3) 基本解は e^{2x}, e^{6x} である.

$y_0 = ae^{3x}$ とおくと.

$9ae^{3x} - 24ae^{3x} + 12ae^{3x} = 2e^{3x}$ より $a = -\frac{2}{3}$

$\therefore y = c_1e^{2x} + c_2e^{6x} - \frac{2}{3}e^{3x}$ となる