ラプラス変換

関数 $f(t), g(t)$ について次が成立する.

定理. ある程度の条件のもとで.

$L(f(t)) = L(g(t))$ なら. 不連続点を除いて. $f(t) = g(t)$ である.

これより次の定義ができる.

定義. 関数 $F(s)$ に対し.

$L(f(t)) = F(s)$ となる $f(t)$ を. $F(s)$ のラプラス逆変換 といい.

$f(t) = L^{-1}(F(s)) = L^{-1}(F)$ などで表す.

ラプラス逆変換を求めるには次の4つの方法が役立つ.

1. 形を合わせる.

すでに学んだラプラス変換の公式に形を合わせて. ラプラス逆変換を求める.

例. ラプラス逆変換を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{2+5s}$　　(2) $\dfrac{s-3}{(s-3)^2+9}$

答. (1) 変形すると.

$$\frac{1}{2+5s} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{s+\frac{2}{5}} = \frac{1}{5}\cdot L\left(e^{-\frac{2}{5}t}\right) = L\left(\frac{1}{5}e^{-\frac{2}{5}t}\right)$$ より

$$L^{-1}\left(\frac{1}{2+5s}\right) = \frac{1}{5}e^{-\frac{2}{5}t}.$$ である

(2). $G(s) = \dfrac{s}{s^2+9}$ とおくと. $G(s) = L(\cos 3t)$ であり. また.

$$\frac{s-3}{(s-3)^2+9} = G(s-3) = L(\cos 3t)(s-3) = L(e^{3t}\cdot\cos 3t)$$ となる. これより.

$$L^{-1}\left(\frac{S-3}{(S-3)^2+9}\right)=e^{3t}\cdot\cos 3t$$ となる.

問 ラプラス逆変換を求めよ

(1) $\frac{1}{1+3S}$ (2) $\frac{S}{(S-2)^2+1}$ (3) $\frac{S\cdot e^{-3S}}{S^2+4}$ (解略は例題2.3.1参照)

2. 部分分数に分解する.

例. ラプラス逆変換を求めよ.

(1) $\frac{S-8}{S^2-S-6}$ (2) $\frac{1}{(S^2+1)(S^2+4)}$

答 (1) $\frac{S-8}{S^2-S-6}=\frac{S-8}{(S-3)(S+2)}=\frac{A}{S-3}+\frac{B}{S+2}$ とおく. 両辺に$(S-3)(S+2)$をかけ,

$S-8=A(S+2)+B(S-3)$ より

$(A+B)S+2A-3B=S-8$ となり. $A+B=1$, $2A-3B=-8$.

$\therefore \begin{cases} A=-1 \\ B=2 \end{cases}$ となり.

$$\frac{S-8}{S^2-S-6}=\frac{-1}{S-3}+\frac{2}{S+2}=-L(e^{3t})+2L(e^{-2t})$$

$$=L(-e^{3t}+2e^{-2t})$$

$\therefore L^{-1}\left(\frac{S-8}{S^2-S-6}\right)=-e^{3t}+2e^{-2t}$ である.

(2) $\frac{1}{(S^2+1)(S^2+4)}=\frac{AS+B}{S^2+1}+\frac{CS+D}{S^2+4}$ として. A.B.C.Dを求めると.

$$\frac{1}{(S^2+1)(S^2+4)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{S^2+1}-\frac{1}{3}\,\frac{1}{S^2+4}=\frac{1}{3}L(\sin t)-\frac{1}{6}L(\sin 2t)$$

$= L\left(\frac{1}{3}\sin t - \frac{1}{6}\sin 2t\right)$ より $L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}\right) = \frac{1}{3}\sin t - \frac{1}{6}\sin 2t$ となる

問 ラプラス逆変換を求めよ

(1) $\frac{s}{s^2+3s+2}$ (2) $\frac{3s^2-5s+4}{(s-1)^3}$ (3) $\frac{1}{(s+2)^2(s^2+2s+2)}$ (例題 2.3.2)

3. 合成積法則を用いる.

例. $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s+1)}\right)$ を求めよ

答. $F(s)\cdot G(s) = L(f*g)$ より

$L^{-1}(F(s)\cdot G(s)) = f*g$ である.

今. $F(s) = \frac{1}{s^2}$, $G(s) = \frac{1}{s+1}$ とおけば. $f(t) = L^{-1}(F) = t$. $g(t) = e^{-t}$ より

$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s+1)}\right) = L^{-1}(F(s)\cdot G(s)) = f*g(t) = t*e^{-t}$

$= \int_0^t (t-u)e^{-u}du = \left[-(t-u)e^{-u}\right]_0^t + \int_0^t (-1)e^{-u}du$

$= t + \left[e^{-u}\right]_0^t = t + e^{-t} - 1$ となる

問. ラプラス逆変換を求めよ

(1) $\frac{1}{s(s^2+1)}$ (2) $\frac{1}{s^2(s+2)}$ (3) $\frac{s^2}{(s^2+1)^2}$ (例題 2.3.3)

4. 像の微分法則を用いる.

$F(s)=L(f(t))$, $\frac{d}{ds}F(s)=L(g(t))$ のとき.

$L(-tf(t))=\frac{d}{ds}F(s)=L(g(t))$ であるこれより $f(t)=-\frac{g(t)}{t}$

例. $L^{-1}\left(\log\frac{2s^2+1}{s(s^2+1)}\right)$ を求めよ.

答 $F(s)=\log\frac{2s^2+1}{s(s^2+1)}$ とおくと.

$$\frac{d}{ds}F(s)=\frac{s(s^2+1)}{2s^2+1}\cdot\frac{4s(s(s^2+1))-(2s^2+1)(3s^2+1)}{s^2(s^2+1)^2}=\frac{-(2s^4+s^2+1)}{(2s^2+1)s(s^2+1)}$$

$$=-\left(\frac{1}{s}+\frac{2s}{s^2+1}-\frac{4s}{2s^2+1}\right)$$

$$=L\left(-1-2\cdot\cos t-2\cdot\cos\frac{t}{\sqrt{2}}\right)=L(g(t))$$ なので.

$$f(t)=\frac{1}{t}\left(1+2\cos 2t-2\cos\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$$ である.

問 ラプラス逆変換を求めよ.

(1) $\log\left(1+\frac{1}{s^2}\right)$ (2) $\log\frac{s-1}{s+1}$ (3) $\tan^{-1}\frac{1}{s}$ (例題2.3.4の順番違い)