解答例

1 (1) 変数分離形なので.

$$\frac{\cos y}{\sin y}y' = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \int \frac{\cos y}{\sin y}dy = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$$

$$\log \sin y = -\log \cos x + C$$

$$\sin y = \frac{1}{\cos x}\cdot e^{c} = \frac{c}{\cos x} \quad (e^{c} \to c)$$ となる

(2) $y' + \frac{4}{x}y = x^{-5}$ となる. ここで $y' = -\frac{4}{x}y$ を解くと.

$\int \frac{1}{y}dy = \int -\frac{4}{x}dx$ より $\log y = -4\log x + C$.

$$y = e^{c}\cdot x^{-4} = c\cdot x^{-4} \quad (e^{c} \to c)$$

ここで c を $v(x)$ でおきかえ与式に代入すると.

$y' = v'x^{-4} - 4vx^{-5}$ より

$v'x^{-4} - 4vx^{-5} + 4vx^{-5} = x^{-5}$ $\qquad \therefore v' = x^{-1}$

$v = \log x + C$ である

$\therefore y = (\log x + c)x^{-4}$ となる.

(3) $\frac{\partial}{\partial y}(2x + e^{y}) = e^{y}$, $\frac{\partial}{\partial x}xe^{y} = e^{y}$ より. これは完全.

ここで $u(x,y) = \int 2x + e^{y}dx + w(y) = x^{2} + xe^{y} + w(y)$ とする.

$\frac{\partial}{\partial y}u = xe^{y}$ となる $w(y)$ を求めると.

$xe^{y} + w'(y) = xe^{y}$ より $w'(y) = 0$ となり. $w(y) = 0$ をえる.

$\therefore x^{2} + xe^{y} = c$ が解である.

2. $\begin{cases} x-y-1=0 \\ x-2y-1=0 \end{cases}$ を解くと $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ となる.

∴ $X=x-1$, $Y=y$ で変数変換すると $\frac{dY}{dX}=\frac{dy}{dx}$ より与式は

$$Y'=\frac{X-Y}{X-2Y}=\frac{1-\frac{Y}{X}}{1-2\frac{Y}{X}}$$ となる. ここで $v=\frac{Y}{X}$ とおくと.

$Y'=v+Xv'$ より与式は

$$v+Xv'=\frac{1-v}{1-2v}$$

$$v'=\frac{1}{X}\left(\frac{1-v}{1-2v}-v\right)=\frac{1}{X}\frac{1-2v+2v^2}{1-2v}=-\frac{2}{X}\frac{2v^2-2v+1}{4v-2}$$ となる

∴ $\displaystyle\int\frac{4v-2}{2v^2-2v+1}dv=\int-\frac{2}{X}dX$ となり

$$\log(2v^2-2v+1)=-2\log X+C$$

$$2v^2-2v+1=e^C\cdot X^{-2}=C\cdot X^{-2}\quad(e^C\to C)$$ となる.

$v=\frac{Y}{X}$ より $2Y^2-2XY+X^2=C$ となり

$$2y^2-2(x-1)y+(x-1)^2=C$$ をえる.

3. 特性方程式は $\lambda^2-4=0$ より $\lambda=\pm2$.

∴ 基本解は e^{2x}, e^{-2x} である

推測特殊解を

$y_0=ae^{3x}+b\sin x+c\cos x$ とすると

$y_0'=3ae^{3x}+b\cos x-c\sin x$

$y_0''=9ae^{3x}-b\sin x-c\cos x$ より

$9ae^{3x} - b\sin x - c\cos x - 4(ae^{3x} + b\sin x + c\cos x) = 2e^{3x} + \sin x$ となる

$\therefore 5a = 2,\ -5b = 1,\ -5c = 0$ より $a = \frac{2}{5},\ b = -\frac{1}{5}$

$\therefore$ 一般解は $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + \frac{2}{5}e^{3x} - \frac{1}{5}\sin x$ である

4. $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} t\, dt = \left[-\frac{1}{s} t e^{-st}\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st} dt$

$= \frac{1}{s}\left[-\frac{1}{s} e^{-st}\right]_0^\infty = \frac{1}{s^2}$ となる.

5. $L(1 - e^{2t}) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-2}$ より

$L\left(\frac{1-e^{2t}}{t}\right) = \int_s^\infty \frac{1}{p} - \frac{1}{p-2}\, dp = \left[\log p - \log p-2\right]_s^\infty$

$= \left[\log \frac{p}{p-2}\right]_s^\infty = -\log \frac{s}{s-2} = \log \frac{s-2}{s}$ である.

6. 両辺をラプラス変換すると.

$s^2 F(s) - 2 - 6sF(s) + 9F(s) = 0$.

$(s^2 - 6s + 9)F(s) = 2$.

$F(s) = \frac{2}{(s-3)^2} = 2L(t)(s-3) = L(2te^{3t})$ となる

$\therefore f(t) = 2te^{3t}$ である.

7. 与式をラプラス変換すると.

$$\begin{cases} sF(s) - 1 + G(s) = 0 \\ sG(s) - 2 - F(s) = 0 \end{cases}$$ より

$$s^2F(s) + sG(s) = s$$

$$-)\ -F(s) + sG(s) = 2$$

$$(s^2+1)F(s) = s-2$$

$$\therefore F(s) = \frac{s-2}{s^2+1} = \frac{s}{s^2+1} - 2\cdot\frac{1}{s^2+1} = L(\cos t) - 2L(\sin t)$$

$$= L(\cos t - 2\sin t)$$

$\therefore f(t) = \cos t - 2\sin t$ である. また.

$g(t) = -f'(t) = \sin t + 2\cos t$ となる.