解答

1 (1) ノート参照。

(2) $\begin{bmatrix}-2\\1\\5\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$ より

$\begin{cases}x_1=3\\x_2=-\frac{3}{2}\\x_3=-\frac{7}{2}\end{cases}$ となる ∴ $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}6\\-3\\-7\end{bmatrix}$ が成分表示。

(3) $\begin{bmatrix}3\\-1\\0\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$ より

$\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}\\x_2=2\\x_3=\frac{3}{2}\end{cases}$ となる ∴ $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\4\\3\end{bmatrix}$ が成分表示。

2 (1) $\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1\\2\\1\\3\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\1\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}2\\1\\-1\\2\end{bmatrix}$ より

$x_1=x_2=\frac{2}{3},\ x_3=1,\ x_4=-\frac{2}{3}$ より $\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\2\\3\\-2\end{bmatrix}$ が成分表示。

(2) $\begin{bmatrix}-1\\2\\-3\\4\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1\\2\\1\\3\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\1\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}2\\1\\-1\\2\end{bmatrix}$ より

$x_1=-\frac{1}{3},\ x_2=-\frac{17}{6}$
$x_3=-\frac{5}{2},\ x_4=\frac{7}{3}$ となり $\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-2\\-17\\-15\\14\end{bmatrix}$ が成分表示。

3 ノート参照

4 $[v_1\ v_2\ v_3] = [u_1\ u_2\ u_3]P$ より

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} P$$ となり

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$ となる. また 1(2) の結果から.

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ -7 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 \\ -12 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$ が成分表示.

5 $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P$$ より

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$ となる.

また $(2, 3, 5)$ の $\{e_i\}$ に関する成分表示は $(2, 3, 5)$ なので

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 20 \end{bmatrix}$$ が成分表示である.

$\boxed{6}$ (1) ノート参照

(2) $\|v_1\| = 3$ より. $u_1 = \frac{1}{3} v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ である.

$$u_2' = v_2 - (v_2 | u_1) u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\|u_2'\| = 3$ より $u_2 = \frac{1}{3} u_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ である.

$$u_3' = v_3 - (v_3 | u_1) u_1 - (v_3 | u_2) u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\|u_3'\| = 1$ より. $u_3 = u_3' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ である

(3) $\|v_1\| = \sqrt{3}$ より $u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ である.

$$u_2' = v_2 - (v_2 | u_1) u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{6}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ である.

$\|u_2'\| = \sqrt{2}$ より $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ である.

$$u_3' = v_3 - (v_3 | u_1) u_1 - (v_3 | u_2) u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\|u_3'\| = \frac{1}{\sqrt{6}}$ より $u_3 = \sqrt{6} \cdot u_3' = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ となる.