解答 その2

(計算を省略しているところもありますが、テストなどでは省略しないで書いて下さい)

1 (1). (2) ノート参照、

(3) $r\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=0$ とすると $\begin{cases}2r+3s=0\\3r+s=0\end{cases}$ より $r=s=0$ ∴ 1次独立

別解 $A=[v_1\ v_2]=\begin{bmatrix}2&3\\3&1\end{bmatrix}$ とすると $\mathrm{rank}A=2$ より 1次独立.

(4) $r\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=0$ とすると. $\begin{cases}r+s+t=0\\r-s+t=0\\r+s-t=0\end{cases}$ より

$r=s=t=0$ ∴ 1次独立.

別解 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}$ とすると $\mathrm{rank}A=3$ より 1次独立.

(5) $r\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}=0$ とすると. 例えば、この解として.

$r=2,\ s=-1,\ t=-1$ がある. ∴ 1次従属.

別解. $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&3&-1\end{bmatrix}$ とすると $\mathrm{rank}A=2$ より 1次従属.

2. 3(1) ノート参照、

3(2). $A=\begin{bmatrix}2&1\\3&1\end{bmatrix}$ とすると $\mathrm{rank}A=2$ より 1次独立.

また. $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ とすると. $\begin{cases}2r+s=x\\3r+s=y\end{cases}$ より $\begin{cases}r=y-x\\s=3x-2y\end{cases}$ となり

$\forall\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$ は $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=(y-x)\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+(3x-2y)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ とできる.

これより生成系であるので、これは基底となる．

(3) $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ とすると $\operatorname{rank}A=3$ より 1次独立．

また．$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ とすると．$\begin{cases}r+s=x\\r-s=y\\t=z\end{cases}$ より

$r=\frac{1}{2}(x+y)$, $s=\frac{1}{2}(x-y)$, $t=z$ となり．

$\forall\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$ は．$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\frac{1}{2}(x+y)\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+\frac{1}{2}(x-y)\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ とできる

∴生成系なので基底となる．

(4). $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&3&-1\end{bmatrix}$ とすると．$\operatorname{rank}A=3$ より 1次独立．

また．$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$ とすると．$\begin{cases}r+s+t=x\\r+2s+t=y\\r+3s-t=z\end{cases}$ より

$r=\frac{1}{2}(5x-4y+z)$, $s=y-x$, $t=\frac{1}{2}(-x+2y-z)$ となり

$\forall\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$ は $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\frac{1}{2}(5x-4y+z)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+(y-x)\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+\frac{1}{2}(-x+2y-z)\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$ とできる．

∴生成系なので．基底となる

4 (1) ノート参照

(2) $x+2y=0$ を解くと．自由度1 より $y=t$ とおいて．

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ となる $\therefore V = \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$.

$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ は1次独立なので. Vの基底になる. $\therefore \dim V = 1$.

(3) $x+y+z=0$ を解くと. 自由度2より $y=t, z=s$ とおいて.

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t-s \\ t \\ s \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ となる $\therefore V = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$.

$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ は1次独立なので(証明略) Vの基底になる $\therefore \dim V = 2$

(4). $x+y=0$, $x+2y+z+2w=0$ を解くと 自由度2より $y=t, w=s$ として.

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ -t-2s \\ s \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ となる $\therefore V = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$.

これらのベクトルは1次独立なので. Vの基底になる $\therefore \dim V = 2$.

5. 計算すると.

$W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$, $W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ となる.

またこれらのベクトルがそれぞれ1次独立になることから.

$\dim W_1 = 2$, $\dim W_2 = 1$, $\dim W_1 \cap W_2 = 0$.

$\dim(W_1 + W_2) = 2 + 1 - 0 = 3$ となる.

6. 計算すると.

$W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ $W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$.

$W_1 \cap W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle$ となる. またこれらのベクトルがそれぞれ 1次独立になることから,

$\dim W_1 = 3$, $\dim W_2 = 2$, $\dim W_1 \cap W_2 = 1$.

$\dim W_1 + W_2 = 3 + 2 - 1 = 4$ となる.