

## 線形代数学 2 平成28年度前期 期末試験問題

注意：解答の順番は問わないが、どの問題を解いているか分かるように書くこと。また、解答の書き方により、記載の配点とは別に、最大で5点の加点または減点をすることがある。

1.  $\mathbb{R}^3$ において、ベクトル  $v = (1, 4, -3)$  が  $u = (2, 3, 2)$  と  $w = (-1, 0, 2)$  によって生成される部分空間に入っているか調べよ。また、入っている場合は  $v$  を  $u$  と  $w$  の一次結合で表せ。(12点)
2. 次の  $\mathbb{R}^3$  のベクトルの組が1次独立か判定せよ。(10点)

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3.  $\mathbb{R}^3$  の二つの基底

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

について、 $\{u_1, u_2, u_3\}$  から  $\{v_1, v_2, v_3\}$  への基底の変換行列を求めよ。(12点)

4. 次の  $\mathbb{R}^3$  から  $\mathbb{R}^3$  への線形写像  $f$  について、 $\ker f$  の基底と次元を求めよ。(12点)

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

5.  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

と定めるとき、基底  $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  と基底  $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  に関する  $f$  の表現行列を求めよ。(12点)

6. 線形空間  $V$  の任意のベクトル  $x$  に対し、 $0 \cdot x$  が零ベクトルになることを証明せよ。(2点)
7. 次の行列  $A$  が、対角化不可能であることを示せ。(10点)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

8. 次の行列  $B$  を以下の順序で対角化せよ。(30点)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- (1) 行列  $B$  の固有値を求めよ。
- (2) 各固有値に属する固有ベクトルと固有空間の次元をそれぞれ求めよ。
- (3) 行列  $B$  が対角化可能である理由を述べよ。
- (4)  $B$  を対角化する行列  $P$  を求めよ。
- (5)  $P^{-1}BP$  を計算せよ。(この問題は計算過程を書かなくてもよい。)