解答例

1. $v=au+bw$ とすると.

$$\begin{bmatrix}1\\4\\-3\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}2\\3\\2\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}$$ より $\begin{cases}2a-b=1\\3a\quad\ =4\\2a+2b=-3\end{cases}$ となる.

第2式より $a=\frac{4}{3}$, これと第1式より $b=\frac{5}{3}$. しかしこれは第3式をみたさない.

∴解なしなので. v は $\langle u,w\rangle$ には入らない

2. $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\-1&1&2\end{bmatrix}$ とおくと

$$\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\-1&1&2\end{bmatrix}\overset{③\leftrightarrow①}{=}\operatorname{rank}\begin{bmatrix}-1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\end{bmatrix}\underset{③+①\times2}{\overset{②+①}{=}}\operatorname{rank}\begin{bmatrix}-1&1&2\\0&3&3\\0&3&5\end{bmatrix}$$

$$\overset{③-②}{=}\operatorname{rank}\begin{bmatrix}-1&1&2\\0&3&3\\0&0&2\end{bmatrix}=3$$ ∴ 1次独立である.

3. 基底の変換行列を P とすると.

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&3&1\\1&5&-1\end{bmatrix}P$$ である. ここで

$$\begin{vmatrix}2&1&0\\0&3&1\\1&5&-1\end{vmatrix}=-6+1-10=-15$$ なので. 余因子行列を計算すると.

$$\begin{bmatrix}2&1&0\\0&3&1\\1&5&-1\end{bmatrix}^{-1}=-\frac{1}{15}\begin{bmatrix}-8&1&1\\1&-2&-2\\-3&-9&6\end{bmatrix}$$ である. よって.

$$P = -\frac{1}{15}\begin{bmatrix} -8 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & -9 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{15}\begin{bmatrix} -6 & -8 & -8 \\ -3 & 1 & 1 \\ -6 & 12 & -18 \end{bmatrix}$$ である

4. 係数行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ の階数は.

$$\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ より 1. よって $A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ の

解の自由度は 2. 今. $y = t,\ z = s$ とすると $x = -t-2s$ より

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t-2s \\ t \\ s \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ となり $\ker f = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

となる. この2つのベクトルは1次独立なので.

$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ が $\ker f$ の基底であり. $\dim\ker f = 2$ である.

5. $f(v_1) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix} = 6u_1 - 7u_2 = [u_1\ u_2]\begin{bmatrix} 6 \\ -7 \end{bmatrix}$

$f(v_2) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} = 8u_1 - 4u_2 = [u_1\ u_2]\begin{bmatrix} 8 \\ -4 \end{bmatrix}$

$f(v_3) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = 5u_1 - 2u_2 = [u_1\ u_2]\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$.

∴ f の表現行列は $\begin{bmatrix} 6 & 8 & 5 \\ -7 & -4 & -2 \end{bmatrix}$ である.

6. $0\cdot x = (0+0)\cdot x = 0\cdot x + 0\cdot x$ である. 両辺に $-0\cdot x$ を足せば. $0\cdot x = 0$ となる.

7. $\varphi_A(t) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-3)^2(\lambda-2)-(\lambda-2) = (\lambda-2)(\lambda^2-6\lambda+8)$
$= (\lambda-2)^2(\lambda-4)$ となる.

∴固有値は2と4. ここで $V(2)$ を調べると.

$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ より. $x=z=0$. ∴ $V(2) = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$ となる.

∴ $\dim V(2) = 1 \neq 2 =$ (固有値2の重複度) となるので対角化不可能である.

8.(1) $\varphi_B(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -1 & -1 \\ -1 & t-1 & -1 \\ -1 & -1 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^3-2-3(t-1)$

$= t^3-3t^2+3t-1-2-3t+3 = t^2(t-3)$.

∴固有値は0と3.

(2) $V(0)$ を調べると.

$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$. より $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ となる.

∴ $y=t$, $z=s$ とすれば, $x=-t-s$ より.

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t-s \\ t \\ s \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(t,s) \neq (0,0)$ が固有ベクトル.

また $V(0) = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ でこの2つのベクトルは1次独立だから. $\dim V(0) = 2$

$V(3)$ を調べると.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \text{ より } \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[①\rightleftarrows②]{②\times -1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[③+①]{②-①\times 2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[②\times\frac{1}{3}]{③+②} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ となる. ∴係数行列の階数は2で

自由度は1. ∴ $z=t$ とおくと $y=t$, $x=t$ となる.

∴ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(t \neq 0)$ が固有ベクトル. $V(3) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ より $\dim V(3) = 1$.

(3). Bは対称行列なので対角化可能.

(4) $P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ である

(5) $P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ である.