§2 線形写像と行列

写像. X、Yを集合とする. $\forall x \in X$に対し. $y \in Y$を1つ対応させる方法を

XからYへの写像とよび、

$$f: X \longrightarrow Y$$ と表す.

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x & \longmapsto & y \end{array}$$

このとき. Xを定義域, Yを値域という.

またyを$f(x)$ともかき、xのfによる像という.

例. $\mathbb{R}$から$\mathbb{R}$への対応fを.

$f(x) = x^2+1$, $f(x) = 3x$, $f(x) = \sin x$

などとすれば, これらは写像である.

以下. fは線形空間Vから線形空間Wへの写像とする.

定義5.1. $f: V \to W$が次の条件をみたすとき. fは線形写像であるという

(1) $\forall x, y \in V$ に対し. $f(x+y) = f(x) + f(y)$

(2) $\forall x \in V$, $\forall r \in \mathbb{R}$に対し. $f(rx) = r \cdot f(x)$

この定義からただちに.

$$f(\mathbf{0}) = f(0 \cdot \mathbf{0}) = 0 \cdot f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

$$f(-x) = f((-1) \cdot x) = (-1) \cdot f(x) = -f(x)$$ がわかる

例 Aを(m, n)行列とし, $f_A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$を. $\forall x \in \mathbb{R}^n$に対し.

$f_A(x) = Ax$ とすると. これは線形写像になる.

∵ $n=m=2$ のときのみ示す.

$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $r\in\mathbb{R}$ とすると.

$$f_A(x+y)=A(x+y)=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$=Ax+Ay=f_A(x)+f_A(y)$$

$$f_A(rx)=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} rx_1 \\ rx_2 \end{bmatrix}=r\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=rAx=r\cdot f_A(x)$$ である //

例. V を $\overbrace{\text{微分}}^{\text{何回でも}}$可能な $\mathbb{R}$ 上の関数全体とするとき.

$$\begin{array}{ccccc} \dfrac{d}{dx}: & V & \longrightarrow & V \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & f & \longmapsto & \dfrac{d}{dx}f \end{array}$$ は線形写像になる

注意. (1) $V=W$ のとき, f は線形変換ともいう

(2) $1_V: V\to V$, $1_V(x)=x$ をみたす写像を恒等写像という

(3) $f: V\to W$, $g: W\to U$ のとき.

$$\begin{array}{cccc} g\circ f: & V & \longrightarrow & U \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$ を f と g の合成写像という.

以下, 写像は全て線形写像とする.

定義5.2. $f: V\to W$ に対し.

$\mathrm{Im} f=\{f(x) \mid x\in V\}\subset W$ を f の像という. $f(V)$ ともかく.

$\ker f=\{x\in V \mid f(x)=0\}$ を f の核という

命題5.1 $f: V \to W$ について次が成立.

(1) $\mathrm{Im} f$ は Wの部分空間

(2) $\ker f$ は Vの部分空間

∵ (1). $x, y \in \mathrm{Im} f$, $r \in \mathbb{R}$ とすると. $v, w \in V$ が存在して.

$x = f(v)$, $y = f(w)$ とできる. ここで.

$x + y = f(v) + f(w) = f(v+w) \in \mathrm{Im} f$.

$r \cdot x = r \cdot f(v) = f(rv) \in \mathrm{Im} f$ より示せた

(2) $x, y \in \ker f$, $r \in \mathbb{R}$ とすると.

$f(x+y) = f(x) + f(y) = 0 + 0 = 0$ ∴ $x + y \in \ker f$

$f(rx) = rf(x) = r \cdot 0 = 0$ ∴ $rx \in \ker f$ より示せた.

例1

$$\ker f = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \middle| \begin{array}{c} x + y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\}$$ となる. これを解くと.

係数行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ は $\mathrm{rank} A = 2$ より 自由度1. ∴ $y = t$ とおけば

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$ となり $\ker f = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$ である

∴ $\dim \ker f = 1$, 基底は $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ である.

問2, 3