命題4.13 W_1, W_2 を V の部分空間とするとき.

$$\dim(W_1+W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

(∵) $\{w_1, \cdots, w_k\}$ を $W_1 \cap W_2$ の基底とする.

$W_1 \cap W_2$ は W_1, W_2 の部分空間なので.

$\{w_1, \cdots, w_k, u_1, \cdots, u_t\}$ が W_1 の基底に.

$\{w_1, \cdots, w_k, v_1, \cdots, v_s\}$ が W_2 の基底になるようにとれる.

ここで. $\{w_1, \cdots, w_k, u_1, \cdots, u_t, v_1, \cdots, v_s\}$ が W_1+W_2 の基底になることを示す.

生成系であること.

${}^\forall x+y \in W_1+W_2$ に対し.

$x = a_1w_1 + \cdots + a_kw_k + b_1u_1 + \cdots + b_tu_t$

$y = c_1w_1 + \cdots + c_kw_k + d_1v_1 + \cdots + d_sv_s$ とできる. これより

$x+y = (a_1+c_1)w_1 + \cdots + (a_k+c_k)w_k + b_1u_1 + \cdots + b_tu_t + d_1v_1 + \cdots + d_sv_s$

となる.

1次独立であること.

$a_1w_1 + \cdots + a_kw_k + b_1u_1 + \cdots + b_tu_t + c_1v_1 + \cdots + c_sv_s = 0$ とする.

これを変形して.

$W_1 \ni a_1w_1 + \cdots + a_kw_k + b_1u_1 + \cdots + b_tu_t = -c_1v_1 - \cdots - c_sv_s \in W_2$ となる

上のベクトルを x とすれば. $x \in W_1 \cap W_2$ であるので.

$x = d_1w_1 + \cdots + d_kw_k$ とできるが. このことから.

$d_1w_1 + \cdots + d_kw_k + c_1v_1 + \cdots + c_sv_s = 0$ かつ

$a_1w_1+\cdots+a_kw_k+b_1u_1+\cdots+b_tu_t-d_1w_1-\cdots-d_kw_k=0$ となるが、

基底の1次独立性から、a, b, c, d の各係数は全て0でなければならない。

以上より $\dim W_1+W_2=k+t+s$, $\dim W_1=k+t$, $\dim W_2=k+s$.

$\dim W_1\cap W_2=k$ なので、命題が成り立つ。

系4.14. W_1, W_2 が V の部分空間、$V=W_1+W_2$ とすると、

$V=W_1\oplus W_2$ である必要十分条件は $\dim V=\dim W_1+\dim W_2$ である。

∵ $\dim\{0\}=0$ と命題4.13より明らか。

例題 $W_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+2y+z=0\}$

$W_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y=0,\ y+z=0\}$ とするとき、

$\dim W_1+W_2$, $\dim W_1$, $\dim W_2$, $\dim W_1\cap W_2$ を求めよ。

答. $W_1=\left\langle \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix} \right\rangle$, $W_2=\left\langle \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} \right\rangle$, $W_1\cap W_2=\left\langle \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} \right\rangle$ より

$\dim W_1=2$, $\dim W_2=1$, $\dim W_1\cap W_2=1$ である。

∴ 命題4.13より、$\dim W_1+W_2=2+1-1=2$ となる。

問5, 6