定義4.6. $v_1, \cdots, v_n \in V$ が次をみたすとき，Vの基底という．

(1) $v_1, \cdots, v_n$ は 1次独立

(2) $V = \langle v_1, \cdots, v_n \rangle$　　この条件を，$v_1, \cdots, v_n$ が Vの生成系であるという．

例題 2.

(i) $A = [e_1\ e_2\ e_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ とすると，$\mathrm{rank}A = 3$ より 1次独立．

また，$^{\forall}v \in \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ は，$v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

となることから生成系である．∴基底となる．

3 (1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ とすると $\mathrm{rank}A = 3$ （要計算） となることから 1次独立である．

また，$^{\forall}v \in \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対し，$v = av_1 + bv_2 + cv_3$ を解けば，

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (-x+2y-z)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (y-x)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (3x-3y+z)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

となることから生成系である　∴基底となる

問題 3 (2)〜(4) を解け

次元

補題4.8

$V \ni a_1, \cdots, a_n$ が それぞれ $V \ni b_1, \cdots, b_m$ の 1次結合で表されているとき.

$n > m$ ならば, $a_1, \cdots, a_n$ は 1次従属である.

∵ 仮定より.

$$a_1 = c_{11} b_1 + c_{21} b_2 + \cdots + c_{m1} b_m$$

$$a_2 = c_{12} b_1 + c_{22} b_2 + \cdots + c_{m2} b_m$$ とできる. これを行列で.

$$\vdots$$

$$a_n = c_{1n} b_1 + c_{2n} b_2 + \cdots + c_{mn} b_m$$

これらはベクトル

$$[a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n] = [b_1 \ b_2 \cdots b_m] \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}}_{= C}$$ と表せる

ここで $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ に対し. $Ax = 0$ を考えると. $m < n$ より

これは自明でない解をもつ. 今.それを x とすれば.

$$[a_1 \ a_2 \cdots a_n]\, x = [b_1 \cdots b_m]\, Cx = 0$$

∴ $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n = 0$ ∴ 1次従属である.

定理4.9

$\{v_1, \cdots, v_n\}$, $\{u_1, \cdots, u_m\}$ が V の基底なら, $n = m$ である.

∵ もし. $n > m$ なら. $v_1, \cdots, v_n$ は $u_1, \cdots, u_m$ の 1次結合で表せるので

補題4.8より $v_1, \cdots, v_n$ は 1次従属. しかし. これは矛盾 ∴ $n \leqq m$.

同様に $n \geqq m$ もわかるので $n = m$ である.

定義4.7. Vの基底の個数をVの次元といい，$\dim V$で表す．

また $\dim\{0\}=0$ とする．次元は無限次元であるときもある．

例. $\mathbb{R}^n$は $e_1,\cdots,e_n$ を基底にもつので $\dim\mathbb{R}^n=n$ である．(証明略)．

例題. 困(1)

$x+y=0$ を解くと．係数行列 $A=[1\ \ 1]$ は $\operatorname{rank}A=1$ なので．

$x=t$ とおいて．$y=-t$ となる．

$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix}=t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ より $V=\left\langle\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\rangle$ である．

$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ は1次独立なので．上とあわせてこれは基底になる $\therefore \dim V=1$ である．

問題. 困(2)〜(4)

命題4.10. Vがn次元である必要十分条件は．1次独立なベクトルの最大個数がnであることである．このとき．1次独立なn個のベクトルはVの基底になる．

(∵) ① Vがn次元とし．$v_1,\cdots,v_n$ を基底とする．ここで $u_1,\cdots,u_{n+1}\in V$を考えると．

補題4.8より $u_1,\cdots,u_{n+1}$は1次従属になる．

$\therefore$ 1次独立な最大個数はn．

②. Vに含まれるn個の1次独立なベクトルを $v_1,\cdots,v_n$ とする．

$^\forall u\in V$に対し．$v_1,\cdots,v_n,u$は1次従属なので．命題4.7(3)より

uは$v_1,\cdots,v_n$の1次結合で表せる．

$\therefore V=\langle v_1,\cdots,v_n\rangle$ となり．$v_1,\cdots,v_n$は基底である //

<u>定理4.11</u>. $\dim V = n$ とし. $v_1, \cdots, v_k \in V$ $(k < n)$ が1次独立のとき.
$u_{k+1}, \cdots, u_n \in V$ を付け加えて. $v_1, \cdots, v_k, u_{k+1}, \cdots, u_n$ が基底になるようとれる.

∵ $W = \langle v_1, \cdots, v_k \rangle$ とすると. $\dim W = k < n = \dim V$ より.
Wに含まれないVのベクトルがある. それを. u_{k+1} とする.
すると. $v_1, \cdots, v_k, u_{k+1}$ は1次独立
(∵ もし1次従属なら命題4.7(3) より $u_{k+1} \in W$ となってしまう.)
ここで. $n = k+1$ なら命題4.10より $v_1, \cdots, v_k, u_{k+1}$ は基底である.
$n > k+1$ なら. 上と同様に. $v_1, \cdots, v_k, u_{k+1}, u_{k+2}$ が1次独立であるようにとれる.
以下くり返せば, $v_1, \cdots, v_k, u_{k+1}, \cdots, u_n$ が1次独立になるようにとれ.
これはVの基底になる. //.

<u>系4.12</u>. WをVの部分空間とすると.
(1) $\dim W \leqq \dim V$
(2) $\dim W = \dim V \Rightarrow W = V$

∵ (1) 定理4.11より. Wの基底に適当なベクトルを加えてVの基底にできる
∴ $\dim W \leqq \dim V$
(2) 命題4.10より. Wの基底はVの基底になる
∴ $W = \langle w_1, \cdots, w_n \rangle = V$ である //