例(4) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x - y + 3z = 0 \right\}$ は $\mathbb{R}^3$ の部分空間である.

条件式 $2x-y+3z=0$ を方程式と思ってとくと. 係数行列は

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ より $\mathrm{rank}\,A = 1$, ∴ 自由度は2.

ここで. $x=t$, $z=s$ とすれば. $y = 2t+3s$ より.

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 2t+3s \\ s \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ となる. これより.

$W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ となり. 部分空間になる.

問 14, 15, 16, 17

命題4.1. W_1 と W_2 を V の部分空間とすると.

$W_1 \cap W_2$ も V の部分空間になる. $W_1 \cap W_2$ は W_1 にも W_2 にも含まれるベクトル全体

∵ $\mathbb{0} \in W_1$, $\mathbb{0} \in W_2$ より. $\mathbb{0} \in W_1 \cap W_2$.

また. $x, y \in W_1 \cap W_2$, $r \in S$ に対し.

$x \in W_1$, $y \in W_1$ より $x+y \in W_1$

$x \in W_2$, $y \in W_2$ より $x+y \in W_2$ ∴ $x+y \in W_1 \cap W_2$.

同様に $rx \in W_1 \cap W_2$ もわかるので. $W_1 \cap W_2$ は部分空間

定義4.4. W_1, W_2 を V の部分空間とするとき.

$$W_1+W_2=\{x_1+x_2 \mid x_1\in W_1,\ x_2\in W_2\}$$

は V の部分空間になる. これを W_1 と W_2 の和(空間)という.

とくに $W_1\cap W_2=\{\mathbf{0}\}$ のとき. 直和といい. $W_1\oplus W_2$ で表す.

例 $\boxed{18}$ $W_1\cap W_2=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix}2x+y-z=0\\ x=y=z\end{matrix}\right\}$ より. 係数行列は.

$A=\begin{bmatrix}2&1&-1\\1&-1&0\\0&1&-1\end{bmatrix}$ より $\mathrm{rank}\,A=3$ となる(計算略) $\therefore W_1\cap W_2=\{\mathbf{0}\}$.

問 $\boxed{19}$, $\boxed{20}$