<u>定義2.6</u>. 測度 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ が

$\mu(X) = 1$ をみたすとき, μを確率測度という.

以下, $|X| < \infty$, $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$, $\mathcal{M} = 2^X$, $\mu(X) = 1$ とする.

$p_i = \mu(\{x_i\})$ とすると $\sum p_i = 1$ をみたす.

ここで μのエントロピーを次で定義する.

<u>定義2.7</u>.

$S(\mu) := \sum_{i=1}^{n} -p_i \log p_i$ を μのエントロピーという.

(注) この $\log p_i$ は, 情報の価値を表している.

例えば, "コイントス2回の結果"という情報の価値を考えると,

確率 $\frac{1}{4}$ の情報の価値となる. これを $f(\frac{1}{4})$ とする

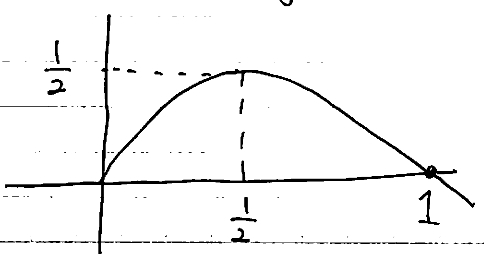
コイントス1回だと確率 $\frac{1}{2}$ の情報の価値なので, 2回分だと $2 \cdot f(\frac{1}{2})$ となる.

∴ $nf(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2^n})$ が必要になるが, これをみたすfは

$f(x) = \alpha \cdot \log x$ である. ここでは $f(x) = -\log x$ としている.

さらに, $S(\mu)$ はこの情報の価値の期待値をとっていることに注意.

なお, $\eta(x) = -x \log x$ のグラフは,



となっている (底は $\frac{1}{2}$)

命題 2.8. $\mu = (p_1, \cdots, p_n)$ について.

$0 \leq S(\mu) \leq \log n$ であり

$S(\mu) = 0 \Leftrightarrow \mu = (1, 0, \cdots, 0)$, $S(\mu) = \log n \Leftrightarrow (\frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n})$

∵ $S(\mu) = 0 \Leftrightarrow -p_i \log p_i = 0 \quad {}^\forall i.$

$\Leftrightarrow \quad p_i = 0 \text{ or } 1 \quad {}^\forall i, \quad \Leftrightarrow \mu = (1, 0, \cdots, 0)$ となる.

$\eta'(x) = -\log x - 1$, $\quad \eta''(x) = -\frac{1}{x} < 0$ より f は凹関数.

すなわち. $\eta(p) + \eta(q) < 2 \cdot \eta\left(\frac{p+q}{2}\right)$ となる.

なので. もし. $\mu = (p_1, \cdots, p_n)$ で, $p_1 \neq p_2$ なら.

$$S(\mu) = \sum \eta(p_i) < 2 \cdot \eta\left(\frac{p_1+p_2}{2}\right) + \sum_{i=3}^{n} \eta(p_i)$$

$$= S\left(\left(\frac{p_1+p_2}{2}, \frac{p_1+p_2}{2}, p_3, \cdots, p_n\right)\right)$$ となる.

∴ 全て同じときが最大になるので.

$p_1 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}$ のとき エントロピーは最大で.

$S(\mu) = n\,\eta(\frac{1}{n}) = \log n$ である //