# 確率統計 解答例

1. $P(A)$ を考えると、Xが出したものに対し、Xが勝つには、YとZが同じか、まけるものを出さないといけない。例えばXがグーなら、YとZは(グー,チョキ),(チョキ,チョキ),(チョキ,グー)の3通りである

$\therefore P(A) = 1 \times \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.　$P(A) = P(B)$ より $P(B) = \frac{1}{3}$.

また $P(A \cap B)$ は上で(グー,チョキ)の場合だけなので、

$P(A \cap B) = 1 \times \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$.　$\therefore P(B|A) = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$

$\therefore P(B|A) = P(B)$ なので互いに独立.

2. 事象A,B,Cを、とったクッキーがX,Y,Zさんのものであるとし、事象Eを、とったクッキーが割れクッキーとすると、

$$P(A|E) = \frac{P(A)P(E|A)}{P(A)P(E|A) + P(B)\cdot P(E|B) + P(C)\cdot P(E|C)}$$

$$= \frac{0.35\cdot 0.08}{0.35\cdot 0.08 + 0.4\times 0.05 + 0.25\times 0.03} = \frac{280}{280+200+75} = \frac{280}{555} = \frac{56}{111}$$ である

3. 確率分布は

| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 確率 | $\frac{1}{6}$ | | … | | | $\frac{1}{6}$ |

より

$E(X) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{7}{2}$ であり、

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{6}(1^2 + \cdots + 6^2) - \frac{49}{4} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot 6\cdot 7\cdot 13 - \frac{49}{4}$

$= \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182-147}{12} = \frac{35}{12}$ である

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{35}{12}}$ である.

4. $p_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)\,dy$ より.

$x<0, x\geq 1$ のときは $p(x,y)=0$ なので、$p_1(x)=0$ である.

$0\leq x<1$ のときは $p_1(x)=\int_0^2(1-x)(2-y)\,dy=(1-x)\left[2y-\frac{1}{2}y^2\right]_0^2$

$=(1-x)\cdot 2 =2(1-x)$ となる.

同様に $p_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)\,dx$ より

$y<0, y\geq 2$ のときは. $p_2(y)=0$.

$0\leq y\leq 2$ のとき.

$p_2(y)=\int_0^1(1-x)(2-y)dx=(2-y)\left[x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{2}(2-y)$ である.

$p(x,y)=p_1(x)\,p_2(y)$ より. $X$と$Y$は独立である.

5. $Z=\frac{X-5}{6}$ とするとこれは $N(0,1)$ に従い.

$P(X\leq C)=P(Z\leq\frac{C-5}{6})=0.225$ となる. これより $\frac{C-5}{6}<0$ で,

$P(0\leq Z\leq-\frac{C-5}{6})=0.275$ である. $\therefore -\frac{C-5}{6}=0.7554$

$\therefore C=0.4676$ である.

6. $X$を500人の平均身長とすると. $X$はほぼ $N(\mu,\frac{20}{500})=N(\mu,\frac{1}{25})$ に従う

ここで $Z=\frac{X-\mu}{\frac{1}{5}}=5(X-\mu)$ は $N(0,1)$ に従う. ここで

$P(X-\delta\leq\mu\leq X+\delta)=0.98$ となる $\delta$を求めると.

$P(X-\delta\leq\mu\leq X+\delta)=P(\mu-\delta\leq X\leq\mu+\delta)=$

$= P(5((\mu-\delta)-\mu) \leq Z \leq 5((\mu+\delta)-\mu)) = P(-5\delta \leq Z \leq 5\delta)$

$= 2P(Z \leq 5\delta) = 0.98$ より

$P(Z \leq 5\delta) = 0.49$ $\therefore 5\delta = 2.3263$ $\therefore \delta \fallingdotseq 0.465 \fallingdotseq 0.47 \fallingdotseq 0.5$

$\therefore$ 98%信頼区間は $169.93 \leq X \leq 170.87$ である.

7. (1) $H_0$：表が出る確率 $p = \frac{1}{2}$, (2) $H_1$：$P > \frac{1}{2}$

(3) $X$を100回コイントスしたときの表が出る割合とすると

$X$はほぼ $N(P, \frac{1}{100} \cdot P(1-P)) = N(\frac{1}{2}, \frac{1}{400})$ に従う

ここで $Z = \dfrac{X - \frac{1}{2}}{\frac{1}{20}} = 20X - 10$ は $N(0,1)$ に従う

(4) $P(Z > \theta(0.05)) = 0.05$ となる $\theta(0.05)$ を求めると.

$P(0 \leq Z \leq \theta(0.05)) = 0.45$ より. $\theta(0.05) = 1.6449$ である

$\therefore Z > 1.6449$ が棄却域である

(5) $Z$の実現値は

$Z = 20 \cdot \frac{60}{100} - 10 = 2$ である

(6) $Z$の実現値は棄却域にあるので.

有意水準5%で $H_1$ が採択される.