χ^2分布

<u>定義</u>. $X_1, \cdots, X_\phi$ が独立で $N(0,1)$ に従うとき.

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_\phi^2 \qquad (\phi \text{ は自然数})$$

が従う分布を 自由度ϕのχ^2分布 (カイ2乗分布) という.

<u>定理</u>. χ^2分布の密度関数は

$$P_\phi(x) = \underbrace{\frac{1}{\Gamma(\frac{\phi}{2})} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\phi}{2}}}_{\downarrow} \cdot x^{\frac{\phi}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

$$= \quad c_\phi \quad x^{\frac{\phi}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$ で与えられる.

ただし. Γ は ガンマ関数.

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \cdot e^{-t} dt,$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z), \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$$ である.

∵ 証明は省略するが.

$\phi = 1$ のときは単純な変数変換
$\phi \geq 2$ のときは帰納法とたたみこみ で示せる

<u>定理2.6.1</u>. 自由度ϕのχ^2分布について.

$$E(\chi^2) = \phi, \quad V(\chi^2) = 2\phi$$ が成立する

∵ $E(\chi^2) = E(X_1^2 + \cdots + X_\phi^2) = E(X_1^2) + \cdots + E(X_\phi^2) = V(X_1) + \cdots + V(X_\phi) = \phi.$

$$V(\chi^2) = V(X_1^2 + \cdots + X_\phi^2) = \phi \cdot V(X_1^2) = \phi\left(E(X_1^4) - E(X_1^2)^2\right)$$

$$= \phi\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx - 1\right) = \frac{\phi}{\sqrt{2\pi}}\left[-x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^\infty + \frac{3\phi}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \phi$$

$$= \frac{3\phi}{\sqrt{2\pi}}\left[-x e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^\infty + \frac{3\phi}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \phi = 2\phi$$

//

定理 2.6.2. χ_1^2, χ_2^2 は独立で、それぞれ自由度 ϕ_1, ϕ_2 とすると、

$\chi^2 = \chi_1^2 + \chi_2^2$ は自由度 $\phi_1 + \phi_2$ の χ^2 分布に従う.

$\because$ 定義から.

$\chi_1^2 = X_1^2 + \cdots + X_{\phi_1}^2$, $\chi_2^2 = X_{\phi_1+1}^2 + \cdots + X_{\phi_1+\phi_2}^2$ なので.

$\chi_2^2 = X_1^2 + \cdots + X_{\phi_1+\phi_2}^2$ となる. //.

χ^2 分布も積分計算は困難なため、確率を求めるのに

χ^2 分布表 を使う. … $P(\chi^2 \geq \chi_\phi^2(\alpha)) = \alpha$ の関係式.

例 $\boxed{1}$ (1) 表より $\phi = 10$, $\alpha = 0.1$ をみて. $a = 15.99$

(2) 表より $\phi = 10$, 表の値 20.5 をさがして. $\alpha = 0.025$.

不等号の向きから. $a = 1 - 0.025 = 0.975$

(3) $\phi = 10$. $\alpha = 1 - 0.05 = 0.95$ をみて. $a = 3.94$

問 $\boxed{1}$ (4) $a = 23.2$ (5) $a = 2.56$

(6) 0.995

$\boxed{2}$ (1) $a = 22.3$ (2) 0.95 (3) 0.01

(4) $a = 8.55$

(5) 表から近い値を探し. $P(\chi^2 < 30.5) \fallingdotseq P(\chi^2 < 30.6) = 0.99$ となる

$\boxed{3}$ $\alpha = 0.975$, 表の値が 11.7 (の近似値) のところを探すと

$\phi = 23$ となる.

ポアソン分布と指数分布

例1. 直線上に任意に点があり、その個数は長さ1あたりλ個であるとする。
この直線上の長さ1の区間を任意にとるとき、そこに含まれる点の個数を
Xとする。

まず、長さ $L = \frac{n}{\lambda}$：有限とし、そこにn個の点をばらまく。

1個の点が長さ1の区間に入る確率は $\frac{1}{L}$ なので、$p = \frac{1}{L}$ とおけば、
Xは $B(n, p)$ に従う。ここで

$$P(X = x) = {}_nC_x \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} \quad (x = 0, 1, \cdots, n)$$ である。

ここで $L \to \infty$ $(n \to \infty)$ を考えると、

$$ {}_nC_x \cdot p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{x!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \cdots \cdot \frac{n-x+1}{n} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \qquad \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to e^{-1}$$

$$\longrightarrow \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}$$ となる。

定義 ポアソン分布. $\lambda > 0$ とするとき、

$$P(X = x) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} \quad (x = 0, 1, \cdots)$$

をみたす分布Xを**パラメタλのポアソン分布**という。

定理1.10.1. ポアソン分布は次をみたす。

$$E(X) = \lambda, \ V(X) = \lambda.$$

例. さきほどの例の設定で. 今度は隣り合う2点の距離をXとする

長さLにn個の点があり. ある1点から長さxの間に点が入らない確率は.
$\underbrace{\text{1点}}_{A}$
$\left(1-\frac{x}{L}\right)^{n-1}$ である.

∴ Aからの距離 $x \sim x+dx$ ではじめて他の点がみつかる確率は.

$$\left(1-\frac{x}{L}\right)^{n-1}\cdot(n-1)\cdot\frac{dx}{L} =: p(x)\,dx \quad \text{である.}$$

↑ほんとうは $1-\left(1-\frac{dx}{L}\right)^{n-1}$ だが. dxが小さいので dx^2 などは無視している.

ここで. $L\to\infty$ ($n\to\infty$) とすれば. $\left(L=\frac{n}{\lambda}\right)$

$$\left(1-\frac{x}{L}\right)^{n-1}\cdot(n-1)\cdot\frac{dx}{L} = \lambda\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\left(1-\frac{\lambda x}{n}\right)^{n-1}dx$$

$$\longrightarrow \lambda\cdot e^{-\lambda x}dx \quad \text{となる.}$$

定義. 指数分布

連続型確率変数 X が

$$p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & (x\geq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$ に従うとき.

X を パラメタλの指数分布 という.

定理1.10.2. 指数分布は次をみたす.

$E(X)=\frac{1}{\lambda}$, $V(X)=\frac{1}{\lambda^2}$.

例 $\boxed{4}$ Xを $\lambda=2.4$の指数分布に従うとすると．求める確率は

$$P(X\geq 0.5)=2.4\int_{0.5}^{\infty}e^{-2.4x}dx$$

$$=\left[-e^{-2.4x}\right]_{0.5}^{\infty}=e^{-1.2}\fallingdotseq 0.301$$ である

$\boxed{5}$ Xを $\lambda=4$の指数分布に従うとすると．求める確率は

$$P(X\geq \tfrac{1}{2})=4\cdot\int_{\frac{1}{2}}^{\infty}e^{-4x}dx=\left[-e^{-4x}\right]_{\frac{1}{2}}^{\infty}$$

$$=e^{-2}$$ である

$\boxed{6}$ n回であたらない確率は

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$$ である

ここで $n\to\infty$ とすると．

$$\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=e^{-1}$$ をえる．

一方．Xを $\lambda=1$の指数分布に従うとすると．

$$P(X\geq 1)=\int_{1}^{\infty}e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_{1}^{\infty}=e^{-1}$$

となり．一致することがわかる．