応用数学２　期末試験対策問題（ベクトル解析）

1. $\mathbf{a} = (1, 2, -1)$，$\mathbf{b} = (-1, 1, 2)$ とするとき，$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ と $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ を求めよ．

2. ベクトル $\mathbf{a} = (1, 2, 1)$，$\mathbf{b} = (2, 1, 3)$，$\mathbf{c} = (2, 0, 1)$ について，$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ および $|\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}|$ を求めよ．また，$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ と $\mathbf{c}$ のなす角を φ とするとき，$\cos\varphi$ の値を求めよ．

3. ベクトル $\mathbf{a} = (a, 0, 1)$，$\mathbf{b} = (-1, 0, b)$ に対して，$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が直交するための a, b の条件と，$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が平行になるための a, b の条件をそれぞれ求めよ．

4. 次のベクトル関数 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の導関数を求めよ．また，$(|\mathbf{a}|^2)'$，$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})'$，$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})'$，$|\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}|'$ をそれぞれ求めよ．

$$\mathbf{a}(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad \mathbf{b}(t) = (\cos t, \sin t, e^{-t}), \quad \mathbf{c}(t) = (1, t, e^t)$$

5. 常ら線 $\mathbf{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ $(a \neq 0)$ は特異点を持たないことを示し，接線を求めよ．

6. 曲線 $\mathbf{r}(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t), b)$ $(a \neq 0)$ の特異点を求めよ．

7. a, b は 0 でない定数とする．曲線 $\mathbf{r}(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t), bt)$ 上を運動する粒子の速度ベクトルと加速度ベクトルを求めよ．

8. 次の曲線に対して，$\mathbf{r}(0)$ から $\mathbf{r}(t)$ までの弧長 s を求め，弧長パラメータ表示せよ．ただし，$a \neq 0$ とする．

   (1)　$\mathbf{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t)$　　(2)　$\mathbf{r}(t) = (t, 1 + 2t)$　　(3)　$\mathbf{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$

9. 曲線 $\mathbf{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ について，フレネ標構，曲率，捩率を求めよ．

10. 球面 $\mathbf{r}(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u, \sin v, \cos u)$ $(0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi)$ について，偏導関数 $\mathbf{r}_u$，$\mathbf{r}_v$，特異点，曲面積を求めよ．また，球面の内側と外側のどちらが表であるかを答えよ．

11. 次の曲面の単位法線ベクトルを求めよ．

    (1)　$\mathbf{r}(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$　　(2)　$\mathbf{r}(u, v) = ((2 + \cos u)\cos v, (2 + \cos u)\sin v, \sin u)$

    (3)　$\mathbf{r}(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$

12. 次の曲面の曲面積を求めよ．

    (1)　$\mathbf{r}(u, v) = (u\cos v, u\sin v, u)$　　$(0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi)$

    (2)　$\mathbf{r}(u, v) = ((2 + \cos u)\cos v, (2 + \cos u)\sin v, \sin u)$　　$(0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi)$

13. 次のスカラー場の勾配を求めよ．

    (1)　$f(x, y, z) = \dfrac{e^x}{1 + y^2 + z^2}$　　(2)　$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

    (3)　$f(x, y, z) = x^2 y + x y^2 - z$　　(4)　$f(x, y, z) = x^2 \sin y \cos z$

14. 次のベクトル場の流線を求めよ．

    (1)　$\mathbf{v}(x, y, z) = (x, y, 0)$　　(2)　$\mathbf{v}(x, y, z) = (-y, x, 0)$

15. 次のベクトル場の発散および回転を計算せよ．

    (1)　$\mathbf{a} = (x^2, y^2, z^2)$　　(2)$\mathbf{a} = (-y, x, 0)$

    (3)　$\left(\dfrac{-y}{x^2 + y^2}, \dfrac{x}{x^2 + y^2}, 0\right)$　　(4)$\mathbf{a} = (y^2 z, x z^2 x^2 y)$