応用数学II・解答例

1.(1) $f(x)$ は奇関数 より $a_n=0$ であり,

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}x\cos nx\right]_0^\pi+\frac{2}{\pi n}\int_0^\pi \cos nx\,dx$$

$$=-\frac{2}{n}(-1)^n+\frac{2}{\pi n}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^\pi=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$ である

$\therefore f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx$ である

(2) $$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{2}{3}\pi^2$$

$\therefore \frac{2}{3}\pi^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\right|^2$ より

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}=\frac{2}{3}\pi^2$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{6}\pi^2$ となる.

2. $n=0$ のとき $$c_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi 2\,dx=1$$

$n\neq 0$ のとき $$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi 2e^{-inx}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{in}e^{-inx}\right]_0^\pi=\frac{i}{\pi n}\left((-1)^n-1\right)$$ である

$\therefore f(x)\sim 1+\sum_{n\neq 0}\frac{i}{\pi n}\left((-1)^n-1\right)e^{inx}$ である.

3. $$\hat{f}(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-iut}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}|t|\cdot e^{-iut}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-1}^{0}-te^{-iut}dt+\int_0^1 te^{-iut}dt\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\left[\frac{1}{iu}te^{-iut}\right]_{-1}^{0}-\frac{1}{iu}\int_{-1}^{0}e^{-iut}+\left[\frac{1}{-iu}te^{-iut}\right]_0^1+\frac{1}{iu}\int_0^1 e^{-iut}dt\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{iu}e^{iu}-\frac{1}{iu}\left[\frac{1}{-iu}e^{-iut}\right]_{-1}^{0}+\frac{i}{u}e^{-iu}+\frac{1}{iu}\left[-\frac{1}{iu}e^{-iut}\right]_0^1\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{i}{u}e^{iu}-\frac{1}{u^2}(1-e^{iu})+\frac{i}{u}e^{-iu}+\frac{1}{u^2}(e^{-iu}-1)\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{i}{u}(-e^{iu}+e^{-iu})+\frac{1}{u^2}(e^{iu}+e^{-iu}-2)\right)$$ となる

4 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(1,2,-1)\times(-1,1,2)=(5,-1,3)$ であり.

$|(5,-1,3)|=\sqrt{35}$ より. $\mathbf{a},\mathbf{b}$ の両方と直交する単位ベクトルは

$\pm\frac{1}{\sqrt{35}}(5,-1,3)$ である.

5. (1) $\dot{\mathbf{r}}(t)=(-4\sin t, 4\cos t, 3)$ より $|\dot{\mathbf{r}}(t)|=\sqrt{16\sin^2 t+16\cos^2 t+9}=5$

$\therefore\ s(t)=\int_0^t|\dot{\mathbf{r}}(t)|dt=\int_0^t 5\,dt=5t$. となる.

$\therefore\ \mathbf{r}(s)=\left(4\cos\frac{s}{5}, 4\sin\frac{s}{5}, \frac{3}{5}t\right)$ である

(2) $\mathbf{e}_1(s)=\mathbf{r}'(s)=\left(-\frac{4}{5}\sin\frac{s}{5}, \frac{4}{5}\cos\frac{s}{5}, \frac{3}{5}\right)$ である.

$\mathbf{r}''(s)=\left(-\frac{4}{25}\cos\frac{s}{5}, -\frac{4}{25}\sin\frac{s}{5}, 0\right)$ より

$\kappa(s)=|\mathbf{r}''(s)|=\frac{4}{25}\sqrt{\cos^2\frac{s}{5}+\sin^2\frac{s}{5}}=\frac{4}{25}$.

$\therefore\ \mathbf{e}_2(s)=\frac{\mathbf{r}''(s)}{\kappa(s)}=\left(-\cos\frac{s}{5}, -\sin\frac{s}{5}, 0\right)$ である.

$\mathbf{e}_3(s)=\mathbf{e}_1(s)\times\mathbf{e}_2(s)=\frac{1}{5}\left(-4\sin\frac{s}{5}, 4\cos\frac{s}{5}, 3\right)\times\left(-\cos\frac{s}{5}, -\sin\frac{s}{5}, 0\right)$

$=\frac{1}{5}\left(3\sin\frac{s}{5}, -3\cos\frac{s}{5}, 4\right)$ となる

6. $\mathbf{r}_u=(\cos v, \sin v, 1)$, $\mathbf{r}_v=(-u\sin v, u\cos v, 0)$ より

$|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|=|(-u\cos v, -u\sin v, u)|=\sqrt{2}u$ である.

∴ 曲面積は

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}\sqrt{2}u\,dv\,du=\int_0^1 2\sqrt{2}\pi u\,du=\left[\sqrt{2}\pi u^2\right]_0^1=\sqrt{2}\pi$$ である.

7. $\nabla f=(2xy+y^2,\ x^2+2xy,\ -1)$ である.