フーリエ余弦・正弦級数

$[0,\pi]$ 上の関数 $f(x)$ の定義域を．$(-\pi,\pi]$ に拡張することで．
$f(x)$ のフーリエ級数を求めることができる．この拡張の方法として．

① $f(-x)=f(x)$ $\quad(0<x<\pi)$

② $f(-x)=-f(x)$ $\quad(0<x<\pi)$

の2通りが考えられる．

①の場合，$f(x)$ は偶なので．$f(x)\cdot\sin nx$ は奇．よって．

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=0$$ である．

また．$f(x)\cdot\cos nx$ は偶なので．

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$$ となり．

拡張前の $f(x)$ を使って表せ．そのフーリエ級数は．

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$ となる．

②の場合も同様に．

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$$ となる．

まとめると．次の定義になる

定義. $[0,\pi]$ 上の関数 $f(x)$ に対し.

$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx$, $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx$ とする. このとき.

$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ を フーリエ余弦級数

$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$ を フーリエ正弦級数 という.

例題 3.2.1. → 問題 3.2.

パーセバルの等式

周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数

$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$ に対し.

$S_N(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx$ を考える.

このとき. $f(x)$ と $S_N(x)$ の2乗誤差を最小にする α_n,β_n を求めてみる.

$$I_N=\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-S_N(x))^2dx.$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)^2+S_N(x)^2-2f(x)\cdot S_N(x)\,dx.$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)^2dx+\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx\right)^2dx$$

$$-2\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\alpha_0}{2}f(x)+\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\cdot f(x)\cos nx+\beta_n\cdot f(x)\sin nx\right)dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)^2dx+\pi\left(\frac{\alpha_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{N}(\alpha_n^2+\beta_n^2)\right)-\pi\left(a_0\alpha_0+2\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\cdot a_n+\beta_n b_n\right)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx + \frac{\pi}{2}(\alpha_0 - a_0)^2 + \pi \cdot \sum_{n=1}^{N}\left((\alpha_n - a_n)^2 + (\beta_n - b_n)^2\right)$$

$$- \pi \cdot \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2)\right)$$ となる.

∴これが最小になるのは $\alpha_n = a_n$, $\beta_n = b_n$ である.

このとき. I_N を I_N^*, $S_N(x)$ を $S_N^*(x)$ とかけば.

$$I_N^* = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_N^*(x))^2 dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx - \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2)\right)$$ となる.

$\longrightarrow$ フーリエ級数は2乗誤差を最小にするものである.

また次が成り立つ.

<u>定理3.3.1</u>: $(-\pi, \pi]$ 上の関数 $f(x)$ のフーリエ係数に対し.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n^2 + b_n^2$$ が成り立つ.

<u>定理3.3.2</u>. $(-\pi, \pi]$ 上の関数 $f(x)$ のフーリエ係数に対し.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$$ が成り立つ

∵ $N \to \infty$ とすれば. $I_N^* \longrightarrow 0$ より導かれる.

例題3.3.1 $\longrightarrow$ 問題3.3.