§2. ラプラス変換

$[0,\infty)$ で定義された関数 $f(t)$ と実数 s に対して.

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt=\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st}f(t)\,dt$$

が, s のある集合 D で収束するとき, 関数 $F(s)$ を $f(t)$ のラプラス変換といい.

$$F(s)=L(f(t))=L(f)=L(f)(s)$$ などで表す.

集合 D を収束域. f を原関数. F を像関数という.

無限積分の復習. 関数 $g(t)$ に対し.

$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_0^R g(t)\,dt$ が収束するとき. その値を

$\displaystyle\int_0^\infty g(t)\,dt$ と表す. もちろん収束しないときもある.

例. (1) $\displaystyle\int_0^\infty t\cdot e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty e^{t^2}dt$ や $\displaystyle\int_0^\infty \cos t\,dt$ は収束しない.

答. (1) $\displaystyle\int_0^R te^{-t^2}dt=\left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_0^R=-\frac{1}{2}e^{-R^2}+\frac{1}{2}\longrightarrow\frac{1}{2}\quad(R\to\infty)$

(2) $e^{t^2}\geq 1$ より

$\displaystyle\int_0^R e^{t^2}dt\geq\int_0^R 1\,dt=R\to\infty\quad(R\to\infty)$ である

$\displaystyle\int_0^R \cos t\,dt=[\sin t]_0^R=\sin R$ は振動するので収束しない.

ラプラス変換を計算するのに、ガンマ関数.

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-t}\cdot t^{s-1}\,dt$$

が役立つ. ガンマ関数については次が成り立つ.

(0) この無限積分は $s>0$ で収束する.

(1) $\Gamma(1) = 1$. (次の問題参照)

(2) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (証明略)

(3) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$

(4) $\Gamma(n) = (n-1)!$ (nは自然数)

実際には t に R を代入したあと、$R\to\infty$ としている

∵ (3) $\Gamma(s+1) = \int_0^\infty e^{-t}\cdot t^s dt = \left[-e^{-t}\cdot t^s\right]_0^\infty + \int_0^\infty s\cdot e^{-t}\cdot t^{s-1} dt = s\Gamma(s)$

(4) $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\cdot\Gamma(n-2) = \cdots = (n-1)\cdots 1\cdot\Gamma(1) = (n-1)!$

基本公式I. aは定数. かっこ内は収束域である.

(1) $L(1) = \frac{1}{s}$ $(s>0)$

(2) $L(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$ $(s>a)$

(3) $a>-1$ のとき.

$L(t^a) = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$ $(s>0)$ 特に.

$L(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$, $L\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$.

(4) $L(\cos at) = \frac{s}{s^2+a^2}$ $(s>0)$

(5) $L(\sin at) = \frac{a}{s^2+a^2}$ $(s>0)$

∵ (1) $L(1) = \int_0^\infty e^{-st}\cdot dt$ であるが

$s=0$ のとき. $\int_0^\infty 1\, dt = \infty$

$s\neq 0$ のとき. $\int_0^\infty e^{-st}dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{s}(-e^{-sR}+1)$

より. $s<0$ なら収束せず.

$s>0$ なら $L(1)=\frac{1}{s}$ となる.

(3). $s \leqq 0$ のとき. $e^{-st} \geq 1$ なので. $(t \geq 0)$

$$\int_0^\infty e^{-st} t^a dt \geq \int_0^\infty t^a dt = \left[\frac{1}{a+1} t^{a+1}\right]_0^\infty \longrightarrow \infty$$ である.

$s>0$ のとき. $st=u$ とすると $s \cdot dt = du$ より

$$\int_0^\infty e^{-st} t^a dt = \int_0^\infty e^{-u} \cdot \left(\frac{u}{s}\right)^a \cdot \frac{1}{s} du$$

$$= \frac{1}{s^{a+1}} \int_0^\infty e^{-u} \cdot u^a du = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$$ である.

問題 ① (2) を示せ

②. ガンマ関数の性質 (1) を示せ.

③ 公式の (4). (5) を示せ.

答. (2) $L(e^{at}) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt$ であるが これは(1)の s を $s-a$ でおきかえたものなので. $L(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$ $(s-a>0)$ である

② $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot dt = \left[-e^{-t}\right]_0^\infty = 1$ である

③ (4), (5) $a=0$ なら (1) と $L(0)=0$ より 示せるので. $a \neq 0$ とする.

$s=0$ のときは.

$$\int_0^R \cos at \, dt = \left[\frac{1}{a} \sin at\right]_0^R = \frac{1}{a} \sin aR$$

$$\int_0^R \sin at \, dt = \left[-\frac{1}{a} \cos at\right]_0^R = -\frac{1}{a}(\cos aR - 1)$$ はともに振動する.

$s \neq 0$ のとき.

$I(t) = \int e^{-st} \cos at \, dt$, $J(t) = \int e^{-st} \sin at \, dt$ とすると.

$$I(t) = \frac{1}{a} e^{-st} \sin at + \frac{s}{a} \cdot \int e^{-st} \cdot \sin at \, dt = \frac{1}{a} e^{-st} \sin at + \frac{s}{a} J(t)$$

$$J(t) = -\frac{1}{a} e^{-st} \cos at - \frac{s}{a} \int e^{-st} \cos at \, dt = -\frac{1}{a} e^{-st} \cos at - \frac{s}{a} I(t)$$

これらより $I(t) = \dfrac{e^{-st}}{s^2+a^2}(a \sin at - s \cos at)$

$J(t) = \dfrac{-e^{-st}}{s^2+a^2}(a \cos at + s \sin at)$ となる

ここで. $s < 0$ のとき. $t \to \infty$ とすると. $I(t), J(t)$ は振動する.

$s > 0$ のとき $t \to \infty$ とすると $I(t), J(t) \to 0$ なので.

$$L(\cos at) = \left[I(t) \right]_0^\infty = \frac{s}{s^2+a^2}$$

$$L(\sin at) = \left[J(t) \right]_0^\infty = \frac{a}{s^2+a^2}$$ となる.//

aを正の定数とするとき.

$$U_a(t) = \begin{cases} 1 & t \geq a \\ 0 & 0 \leq t < a \end{cases}$$

で定義される関数を ヘビサイドの単位関数 という. また.

$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

を. 双曲線余弦関数 , 双曲線正弦関数 という.

グラフは教科書を参照のこと.

基本公式 II. a は定数とする.

(6) $a>0$ とするとき.

$$L(U_a(t)) = \frac{e^{-as}}{s} \quad (s>0)$$

(7) $L(\cosh at) = \dfrac{s}{s^2-a^2} \quad (s>|a|)$

(8) $L(\sinh at) = \dfrac{a}{s^2-a^2} \quad (s>|a|)$ である.

収束域について: 収束域については. 次の3つのいずれかになることが知られている.

(1) どんな s でも収束しない.

(2) 全ての s で収束する.

(3) ある r が存在し. $s<r$ で収束せず. $s>r$ で収束する.

このことは. $t>0$ のとき. $s<r \Rightarrow e^{-st} > e^{-rt}$ であることから示される.

このとき. (3) の r を. ラプラス変換の収束座標という.

なお (1) のとき $r=\infty$, (2) のとき $r=-\infty$ と考える.

以下では. 収束座標についての議論は省略する.