(d) $R(x)=kx^m\cdot e^{\mu x}\cdot\sin\nu x+lx^m\cdot e^{\mu x}\cdot\cos\nu x$ のとき，特殊解を

$$y_0=(a_0x^m+\cdots+a_{m-1}x+a_m)e^{\mu x}\cdot\sin\nu x$$
$$+(b_0x^m+\cdots+b_{m-1}x+b_m)e^{\mu x}\cdot\cos\nu x$$ と推測する．

例．$y''+y=5e^x\cdot\cos x$ を解け

答．特性方程式 $\lambda^2+1=0$ を解くと．$\lambda=\pm i$ より

基本解は $\cos x$，$\sin x$ である．

ここで推測特殊解を．

$y_0=ae^x\sin x+be^x\cdot\cos x$ とおくと．

$y_0'=(a-b)e^x\sin x+(a+b)e^x\cos x$

$y_0''=-2be^x\sin x+2ae^x\cdot\cos x$ より

$(-2be^x\sin x+2ae^x\cos x)+ae^x\sin x+be^x\cos x=5e^x\cos x$．

$(-2b+a)e^x\sin x+(2a+b)e^x\cos x=5e^x\cos x$ となり．

$\begin{cases}-2b+a=0\\2a+b=5\end{cases}$ となる．これを解いて $\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$ を得る．

∴特殊解は $y_0=2e^x\sin x+e^x\cos x$ であり

一般解は $y=c_1\sin x+c_2\cos x+2e^x\sin x+e^x\cos x$ となる．

(e) $R(x)=R_1(x)+\cdots+R_n(x)$ のとき．各 $R_i(x)$ の推測特殊解を

y_{0i} としこの和

$y_0=y_{01}+\cdots+y_{0n}$

を推測特殊解とする．

(f) $R(x)=R_1(x)+\cdots+R_n(x)$ のどれかの項が基本解に含まれる関数の定数倍のとき.

例えば. y_{01} が上の条件をみたすとき. y_{01} を xy_{01} におきかえる.

さらに xy_{01} も上の条件をみたすとき. xy_{01} を x^2y_{01} におきかえる.

例 $y''+y'-6y=x^2-x+e^{2x}$ を解け

答. 基本解は e^{2x}, e^{-3x} である.

推測特殊解を $a_0x^2+a_1x+a_2+be^{2x}$ としたいが.

e^{2x}が基本解にあるため.

$y_0=a_0x^2+a_1x+a_2+bxe^{2x}$ としなければならない. ここで

$y_0'=2a_0x+a_1+be^{2x}+2bxe^{2x}$

$y_0''=2a_0+4be^{2x}+4bxe^{2x}$ より

$2a_0+4be^{2x}+4bxe^{2x}+2a_0x+a_1+be^{2x}+2bxe^{2x}$

$-6(a_0x^2+a_1x+a_2+bxe^{2x})=x^2-x+e^{2x}$ となり.

$-6a_0x^2+(2a_0-6a_1)x+2a_0+a_1-6a_2+5be^{2x}=x^2-x+e^{2x}$ である

$\therefore a_0=-\frac{1}{6}, a_1=\frac{1}{9}, a_2=-\frac{1}{27}, b=\frac{1}{5}$ となり. 一般解は

$y=c_1e^{2x}+c_2e^{-3x}-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{9}x-\frac{1}{27}+\frac{1}{5}\cdot x\cdot e^{2x}$ である

問. 次を解け

(1) $y''-2y'+4y=e^x\cdot\cos x$.

(2) $y''+4y'+5y=5x+8\sin x$

(3) $y''+y'=2x+3\cos x+e^{-x}$

答(1) 基本解は $e^{x}\cos\sqrt{3}x$, $e^{x}\sin\sqrt{3}x$.

推測特殊解を $y_0 = ae^{x}\sin x + be^{x}\cos x$ とすると.

$-2be^{x}\sin x + 2ae^{x}\cos x - 2((a-b)e^{x}\sin x + (a+b)e^{x}\cos x) + 4(ae^{x}\sin x + be^{x}\cos x)$

$= e^{x}\cos x$ より

$6a = 0,\ 2b = 1$ となり $\begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$ である.

$\therefore\ y = C_1 e^{x}\cos\sqrt{3}x + C_2 e^{x}\sin\sqrt{3}x + \frac{1}{2}e^{x}\cos x$ である.

(2) 基本解は $e^{-2x}\cos x$, $e^{-2x}\sin x$.

推測特殊解を $y_0 = a_0 x + a_1 + b_0\sin x + b_1\cos x$ とおくと.

$y_0' = a_0 - b_1\sin x + b_0\cos x$, $y_0'' = -b_0\sin x - b_1\cos x$ より

$-b_0\sin x - b_1\cos x + 4(a_0 - b_1\sin x + b_0\cos x) + 5(a_0 x + a_1 + b_0\sin x + b_1\cos x)$

$= 5x + 8\sin x$ となり

$a_0 = 1,\ a_1 = -\frac{4}{5},\ b_0 = 1,\ b_1 = -1$ をえる.

$\therefore\ y = C_1 e^{-2x}\cos x + C_2 e^{-2x}\sin x + x - \frac{4}{5} + \sin x - \cos x$ である

(3) 基本解は. 1, e^{-x}.

推測特殊解は. $y_0 = a_0 x^2 + a_1 x + b_0\sin x + b_1\cos x + c\cdot xe^{-x}$

$y_0' = 2a_0 x + a_1 - b_1\sin x + b_0\cos x + ce^{-x} - cxe^{-x}$.

$y_0'' = 2a_0 - b_0\sin x - b_1\cos x - 2ce^{-x} + cxe^{-x}$ より

$(2a_0 - b_0\sin x - b_1\cos x - 2ce^{-x} + cxe^{-x}) + 2a_0 x + a_1 - b_1\sin x + b_0\cos x +$

$ce^{-x} - cxe^{-x} = 2x + 3\cos x + e^{-x}$ となり

$a_0 = 1,\ a_1 = -2,\ b_0 = \frac{3}{2},\ b_1 = -\frac{3}{2},\ c = -1$ となる

$\therefore\ y = C_1 + C_2 e^{-x} + x^2 - 2x + \frac{3}{2}\sin x - \frac{3}{2}\cos x - xe^{-x}$ である