④ 全微分方程式

$P(x,y)$, $Q(x,y)$ を x と y の関数とするとき.

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \quad \cdots ☆$$

の形の方程式を全微分方程式という.

全微分の復習

x と y の関数 $u(x,y)$ が全微分可能なとき，すなわち

$$u(x+h,y+k) - u(x,y) = Ah + Bk + \sqrt{h^2+k^2}\cdot\varepsilon(h,k)$$

と表せるとき（ただし A, B は定数，$\lim \varepsilon(h,k) = 0$）

$u(x,y)$ は x と y について偏微分可能で.

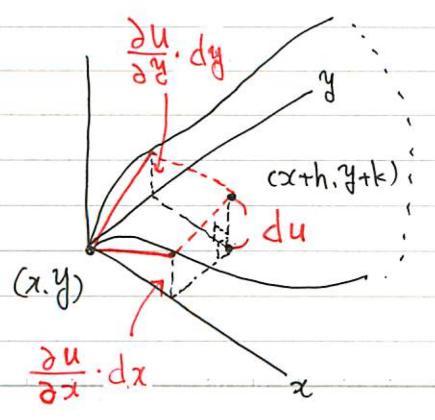
$$A = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \quad , \quad B = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$ となる.

このとき. u の全微分を.

$$\underbrace{du}_{\text{全体でふえる量}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\underbrace{dx}_{x\text{の増加量}} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\underbrace{dy}_{y\text{の増加量}}$$ で表す

$\frac{\partial u}{\partial x}$：$x$ 方向の傾き

$\frac{\partial u}{\partial y}$：$y$ 方向の傾き.



もし. $u(x,y)=C$ であれば 常に $du=0$ なので. 上の式は

(†) … $\dfrac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$ とおいて.

(☆) … $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ になる.

このとき. $u(x,y)=C$ の全微分は ☆ をみたすので.

$u(x,y)=C$ が ☆ の解となる.

一般に ☆ に対し. † をみたす $u(x,y)$ が存在するとき.

☆ は 完全である といい. また ☆ を 完全微分方程式 という.

定理 1.2.2.

P_y, Q_x が連続のとき. ☆ が完全である必要十分条件は

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \quad (P_y=Q_x)$$ である.

このとき. 一般解は

$$\int P(x,y)dx+\int\left\{Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx\right\}dy=C$$ である

∵ ☆ が完全なら. † をみたす $u(x,y)$ が存在するので.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} , \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$$ となるが.

P_y, Q_x が連続なので. 偏微分の交換が可能.

∴ $P_y=Q_x$ である

逆に．$P_y = Q_x$ とする．

まず．$\frac{\partial u}{\partial x} = P$ となってほしいので．

$$u = \int P dx + w(y)$$ とする．

さらに．$u_y = Q$ であってほしいので．

$$\frac{\partial}{\partial y}\int P dx + w'(y) = Q$$ となり

$$w'(y) = Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P dx$$

$$w(y) = \int\left\{Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P dx\right\} dy$$ となる．

∴ この $w(y)$ を使えば (†) をみたす $u(x,y)$ が存在する．

例．(1) $(\cos x + 2xy)dx + x^2 dy = 0$ が完全であることを示し．これを解け．

答．$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\cos x + 2xy) = 2x$．

$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} x^2 = 2x$ より これは完全．

次に (†) をみたす $u(x,y)$ を求めると．$w(y)$ をもちいて．

$$u = \int \cos x + 2xy \, dx + w(y) = \sin x + x^2 y + w(y)$$ となる．

さらに．$u_y = x^2 + w'(y)$ より

$w'(y) = x^2 - x^2 = 0$．となり $w(y) = 0$ となる．

∴ $u = \sin x + x^2 y$ となり．解は $\sin x + x^2 y = C$ である．

univ. CO-OP

問 (1) $(2xy-\cos x)dx+(x^2-2y)dy=0$

(2) $(2x+e^y)dx+xe^y dy=0$

(3) $(y^2+e^x\sin y)dx+(2xy+e^x\cos y)dy=0$

積分因子

☆ … $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$

は完全でないが、これに $\mu(x,y)\neq 0$ をかけた

$\mu(x,y)P(x,y)dx+\mu(x,y)Q(x,y)=0$ が完全であるとき

$\mu(x,y)$ を ☆ の積分因子という。

例. $(2xy^2-y)dx+xdy=0$ を解け

答. まず $\dfrac{\partial}{\partial y}(2xy^2-y)=4x-1$, $\dfrac{\partial}{\partial x}x=1$ より これは完全でない.

そこで積分因子として $\mu=x^m y^n$ と予想してみる 与式にμをかければ

$$(2x^{m+1}y^{n+2}-x^m y^{n+1})dx+x^{m+1}y^n dy=0 \quad \text{より}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x^{m+1}y^{n+2}-x^m y^{n+1})=(n+2)\cdot 2\cdot x^{m+1}y^{n+1}-(n+1)x^m y^n$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^{m+1}y^n)=(m+1)x^m y^n$$

となる.

この2つが等しくなるためには

$$\begin{cases} n+2=0 \\ m+1=-(n+1) \end{cases} \text{より} \quad \begin{cases} n=-2 \\ m=0 \end{cases}$$

であればよい

$\therefore\ \mu=y^{-2}$ が積分因子となる.

ここで $(2x-y^{-1})dx+xy^{-2}dy=0$ を解くと

$u(x,y)=\int 2x-y^{-1}dx+w(y)=x^2-xy^{-1}+w(y)$ となる.

$u_y=xy^{-2}$ より

$xy^{-2}=xy^{-2}+w'(y)$ となり. $w(y)=0$.

∴ $u(x,y)=x^2-xy^{-1}$ となり

$x^2-xy^{-1}=C$ が一般解になる.

問1.2.4 $\boxed{2}$(1), $\boxed{3}$(1).