2 同次形

1変数関数 $F(t)$ を使って

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$$ と表せる微分方程式を同次形という.

これを解くには.

$v = \frac{y}{x}$, つまり $y = xv$ と変数変換すればよい.

このとき

$$\frac{dy}{dx} = v + x \cdot \frac{dv}{dx}$$ なので. これを与式に代入し.

$$v + x \cdot v' = F(v)$$ より

$$v' = \frac{1}{x}\left(F(v) - v\right)$$ と変数分離形にできる.

例. $(x^2+y^2)y' = 2xy$ を解け.

答 $$y' = \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{2 \cdot \frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$ とできるのでこれは同次形.

ここで $v = \frac{y}{x}$ とおけば. $y' = v + x \cdot v'$ より

$$v + xv' = \frac{2v}{1+v^2}$$ となる. これを変形すれば.

$$v' = \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{2v}{1+v^2} - v\right) = \frac{1}{x} \cdot \frac{v - v^3}{1+v^2}$$ となる.

$$\therefore \int \frac{1+v^2}{v-v^3} dv = \int \frac{1}{x} dx.$$

$$\int \frac{1}{v} + \frac{2v}{1-v^2} dv = \log x + C.$$

$$\log v - \log(v^2-1) = \log x + C.$$

$$\log \frac{v}{v^2-1} = \log x + C$$

$$\frac{v}{v^2-1} = e^C \cdot x = C \cdot x \quad (e^C \to C)$$

$$\frac{\frac{y}{x}}{\left(\frac{y}{x}\right)^2-1} = C \cdot x \ , \quad \frac{\cancel{x}y}{y^2-x^2} = C \cdot \cancel{x}$$

$$y^2 - x^2 = \frac{1}{C} y = Cy \quad \left(\frac{1}{C} \to C\right)$$ となる.

問 四(2), 例題1.2.3. 四(6)

<u>変数変換で同次形になるもの.</u>

例. $y' = \dfrac{kx+ly+A}{mx+ny+B}$ を考える.

もし, $A=B=0$ なら同次形なので. $A=B=0$ となるように変数変換したい.

Case 1 : $kn - lm \neq 0$ のとき.

連立方程式

$$\begin{cases} kx+ly+A=0 \\ mx+ny+B=0 \end{cases}$$ は唯一つの解をもつので それを $\begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases}$ とする.

ここで. $p=x-a$, $q=y-b$ と変数変換すると.

$$\frac{dq}{dp} = \frac{\frac{dq}{dx}}{\frac{dp}{dx}} = \frac{y'}{1} = y' = \frac{dy}{dx}$$ がわかる.

さらに与式は、

$$\frac{dq}{dp}=\frac{k(p+a)+l(q+b)+A}{m(p+a)+n(q+b)+B}$$

$$=\frac{kp+lq+ka+lb+A}{mp+nq+ma+nb+B}$$ → 0

$$=\frac{kp+lq}{mp+nq}$$ と同次形 になる。

注 この変数変換は、2直線

$kx+ly+A=0$ と $mx+ny+B=0$ の交点を、原点に動かす

変換変換である。原点を通る直線なら $A=B=0$ なので、同次形になる。

Case 2 (参考) : $kn-lm=0$ のとき。

$u=kx+ly+A$ と変数変換すれば、変数分離形 になる。

例. $y'=\dfrac{2x-y-1}{x-2y+3}$ を解け

答. $\begin{cases}2x-y-1=0\\x-2y+3=0\end{cases}$ を解くと $\begin{cases}x=\frac{5}{3}\\y=\frac{7}{3}\end{cases}$ となる。

これより $\begin{cases}p=x-\frac{5}{3}\\q=y-\frac{7}{3}\end{cases}$ とおいて変数変換すれば、

$$\frac{dq}{dp}=\frac{2p-q}{p-2q}=\frac{2-\frac{q}{p}}{1-2\cdot\frac{q}{p}}$$ と同次形になる。

ここで、$v=\frac{q}{p}$ とすると、

$pv=q$, $\dfrac{dq}{dp}=v+p\cdot\dfrac{dv}{dp}$ より

$$\frac{dv}{dp}=\frac{1}{p}\cdot\left(\frac{2-v}{1-2v}-v\right)=\frac{-2}{p}\cdot\frac{v^2-v+1}{2v-1}$$ となる

$$\therefore \int\frac{2v-1}{v^2-v+1}\,dv=-2\cdot\int\frac{1}{p}\,dp$$

$$\log(v^2-v+1)=-2\log p+C$$

$$v^2-v+1=e^c\cdot p^{-2}=c\cdot p^{-2}\quad(e^c\to c)$$

$$\left(\frac{q}{p}\right)^2-\frac{q}{p}+1=c\cdot\frac{1}{p^2}$$

$$q^2-pq+p^2=C.$$

$$\left(x-\frac{5}{3}\right)^2-\left(x-\frac{5}{3}\right)\left(y-\frac{7}{3}\right)+\left(y-\frac{7}{3}\right)^2=C$$ となる.

問 例1.2.4. $\boxed{2}$(2)