連立微分方程式

ラプラス変換を用いると連立微分方程式も解ける.

例1. 次を解け

$$\begin{cases} f'(t)+g(t)=0 \\ g'(t)-f(t)=0 \end{cases} \quad (f(0)=1,\ g(0)=2.$$

答. $L(f(t))=F(s)$, $L(g(t))=G(s)$ とすると. 像方程式は.

$$\begin{cases} sF(s)-1+G(s)=0 \\ sG(s)-2-F(s)=0 \end{cases}$$ となる. これを解くと.

$F(s)=sG(s)-2$ より

$s^2G(s)-2s-1+G(s)=0$.

$G(s)=\frac{2s+1}{s^2+1}$, $F(s)=\frac{2s^2+s}{s^2+1}-2=\frac{s-2}{s^2+1}$ となる.

$\therefore f(t)=L^{-1}(F(s))=\cos t-2\sin t$

$g(t)=L^{-1}(G(s))=2\cos t+\sin t$ である.

3元の連立方程式も解ける.

例. $$\begin{cases} f'(t)+g(t)-h(t)=0 \\ f(t)+g'(t)+h(t)=0 \\ f(t)+g(t)+h'(t)=0 \end{cases} \quad f(0)=g(0)=h(0)=1$$ を解け.

答 $L(h(t))=H(s)$ とすると. 像方程式は.

$$\begin{cases} sF(s)-1+G(s)-H(s)=0 \\ F(s)+sG(s)-1+H(s)=0 \\ F(s)+G(s)+sH(s)-1=0 \end{cases}$$

となる. これを解くと.

$(s-1)G(s)-(s-1)H(s)=0$ より $G(s)=H(s)$ となり, これを使うと.

$F(s)=\frac{1}{s}$ $G(s)=\frac{s-1}{s(s+1)}=\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s}=H(s)$ となる.

これらをラプラス逆変換し.

$$\begin{cases} f(t)=1 \\ g(t)=h(t)=2e^{-t}-1 \end{cases}$$

となる

問 次を解け. (例2.4.3, 2.4.4 と問2.4.3(4))

(1) $\begin{cases} f'(t)+2g(t)=0 \\ g'(t)-3f(t)=0 \end{cases}$ $f(0)=2,\ g(0)=3.$

(2) $\begin{cases} f'(t)+3g(t)=2 \\ g'(t)-2f(t)=t \end{cases}$ $f(0)=g(0)=0$

(3) $\begin{cases} f'(t)+g(t)-h(t)=0 \\ 3f(t)+g'(t)+h(t)=0 \\ f(t)+g(t)+h'(t)=0 \end{cases}$ $f(0)=2,\ g(0)=3,\ h(0)=1.$