微分方程式への応用

初期値問題

例. $f''(t)-3f'(t)+2f(t)=2$.　$f(0)=f'(0)=0$ を解け

答. まず、両辺をラプラス変換する. 微分法則.

$$L(f'(t))=sF(s)-f(0)$$

$$L(f''(t))=s^2F(s)-s\cdot f(0)-f'(0)$$ より.与式は.

$L(f(t))=F(s)$

$$(s^2F(s)-sf(0)-f'(0))-3(sF(s)-f(0))+2\cdot F(s)=\frac{2}{s} \quad —☆$$

$$(s^2-3s+2)F(s)=\frac{2}{s}$$

☆を像方程式という.

$$F(s)=\frac{1}{s(s-2)(s-1)}=\frac{1}{s}-\frac{2}{s-1}+\frac{1}{s-2}$$ となる.

これをラプラス逆変換すれば.

$$f(t)=1-2e^{t}+e^{2t}$$ となる.

微分方程式の解き方.

$$\begin{tikzcd}
\text{微分方程式} \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\text{ラプラス変換}"] & \text{方程式の解} \\
\text{像方程式} \arrow[r] & \text{像方程式の解} \arrow[u, "\text{ラプラス逆変換}"']
\end{tikzcd}$$

問題. 次を解け. (解答は問題2.4.1の1(1),2(1)の解答と.例題2.4.1を参照.)

(1) $f''(t)-3f'(t)+2f(t)=0$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$.

(2) $f''(t)+f(t)=t$, $f(0)=0$, $f'(0)=2$

(3) $f''(t)-2f'(t)+3f(t)=1$　$f(0)=f'(0)=0$

境界値問題

例. $f''(t)+4f(t)+5f(t)=0$, $f(0)=0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$. を解け.

注. この問題のように. $f(t)$ の2点での値が与えられている問題を 境界値問題 という.

答. 両辺をラプラス変換するが. $f'(0)$ の値がわかっていないので. $f'(0)=a$ とおくと.

$$s^2F(s)-a+4sF(s)+5F(s)=0.$$

$$(s^2+4s+5)F(s)=a.$$

$$F(s)=\frac{a}{s^2+4s+5}=\frac{a}{(s+2)^2+1}$$ よりこれをラプラス逆変換して.

$$f(t)=a\cdot e^{-2t}\cdot\sin t$$ となる. ここで $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ より

$$1=a\cdot e^{-\pi}\sin\frac{\pi}{2}$$ より $a=e^{\pi}$ である

$$\therefore f(t)=e^{\pi-2t}\cdot\sin t$$ である.

問. 次を解け (問2.4.2. 1(2), 2(3) と例2.4.2 参照)

(1) $f''(t)-5f'(t)+4f(t)=0$ $f(0)=0$, $f(1)=1$

(2) $f''(t)+2f'(t)+2f(t)=1$ $f(0)=0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$

(3) $f''(t)-2f'(t)+f(t)=\sin t$ $f(0)=0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.