§1. 微分方程式

微分方程式とその解

1. 等号で結ばれていて
2. よくわからないもの(未知数)があり.
3. 大体は解を求めることが目的になる.

例 2次方程式

$x^2-5x+6=0$ を解くと. $x=2, 3$ となる.

未知数.

解;もとの式に代入すると等号が成立つ.

これに対し微分方程式は.

$y=y(x)$ と. y が x の式で表されているとき.

未知式.

① $y' = \sin x + 1$ ② $y''+y'+\sin y = 0$

$= \dfrac{dy}{dx}$

のように. x, y とその何階かの導関数を含むものを.

(常)微分方程式 という. ここで未知数は y である.

注 偏微分方程式や連立微分方程式もある.

注 ①は1階微分方程式 ②は2階微分方程式 という.

微分方程式の解

例えば. ① の両辺を積分すれば.

$\int y' dx = \int \sin x + 1 dx$ より

$y = -\cos x + x + C$ (Cは任意定数)

を得る.

このように、yがxの式で表せているものを解とする。

実際この式を元の式に代入すると、

左辺 $= y' = (-\cos x + x + C)' = \sin x + 1 =$ 右辺 となり、

等号が成立する。

注. $y = -\cos x + x + C$ のように $y = y(x)$ で表せる解を陽関数解、

$x^2 + y^2 = 1$ のように、$\varphi(x, y) = 0$ と表せる解を陰関数解、

$x = x(t)$, $y = y(t)$ と違う文字 t を使って表せる解を媒介変数表示解

という。

注. ①の解のように、n階微分方程式に対して n個の任意定数を含むものを

一般解という。

また、一般解の任意定数に、特定の値を入れたものを特殊解、

上の2つで表せないものを特異解という。

§1.2. 求積解法.

微分方程式を積分して解を求める方法を求積法という。

求積法では

1. 解の候補の発見
2. 検算
3. 解の吟味

の順で解を求めるが、講義では、1のみ話す。

また、計算は形式的に行い、定義域などは気にしない。

□1 変数分離形

$p(x)$, $q(y)$ をそれぞれ x, y の関数とするとき.

$y' = p(x)\cdot q(y)$ の形の微分方程式を変数分離形という.

これを

$$\frac{dy}{dx} = p(x)\cdot q(y)$$

$$\frac{1}{q(y)}\frac{dy}{dx} = p(x)$$ とし, さらに x で積分すれば

$$\int \frac{1}{q(y)}\,dy = \int p(x)\,dx + C$$ (C は任意定数) を得る.

例 1.2.1.

問 1.2.1 □1

例 1.2.2.

問 1.2.1. □2.