応用数学I 解答例

1 (1). $\dfrac{\cos y}{\sin y}y' = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ より $\displaystyle\int \frac{\cos y}{\sin y}dy = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$

$$\log \sin y = -\log \cos x + C$$

$$\sin y = e^C \cdot \frac{1}{\cos x} = \frac{C}{\cos x} \quad (e^C \to C) \text{ である}$$

(2). $y' = \dfrac{-x-y}{x-y} = \dfrac{-1-\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$ より $v = \dfrac{y}{x}$ とおくと. $y' = v + xv'$ より

$$v + xv' = \frac{-1-v}{1-v}$$

$$xv' = \frac{-1-v}{1-v} - v = \frac{-1-2v+v^2}{1-v}$$ となり.

$$\frac{2v-2}{v^2-2v-1}v' = -\frac{2}{x}$$ とできる. これより

$$\int \frac{2v-2}{v^2-2v-1}dv = \int -\frac{2}{x}dx.$$

$$\log(v^2-2v-1) = -2\log x + C.$$

$$v^2-2v-1 = e^C \cdot x^{-2} = C \cdot x^{-2} \quad (e^C \to C).$$

$$\frac{y^2}{x^2} - 2\frac{y}{x} - 1 = C \cdot x^{-2}.$$

$$y^2 - 2xy - x^2 = C$$ となる.

(3) $xy' + y = 0$ を解くと.

$$\frac{1}{y}y' = -\frac{1}{x}, \quad \int \frac{1}{y}dy = -\int \frac{1}{x}dx$$

$$\log y = -\log x + C. \quad y = e^C \cdot \frac{1}{x} = C \cdot \frac{1}{x}$$ となる

ここで $C = v(x)$ として. これが解となる v を求めると.

$y' = -\frac{1}{x^2}v + \frac{1}{x}v'$ より

$v' - \frac{1}{x}v + \frac{1}{x}v = \sin x$　∴ $v' = \sin x$，$v = -\cos x + C$ となる．

∴ $y = \frac{1}{x}(C - \cos x)$ である．

$\boxed{2}$　$2x^{m+1}y^{n+1}dx + (x^m y^{n+2} - x^{m+2}y^n)dy = 0$ が完全となる m, n を求めると

$\frac{\partial}{\partial y}2x^{m+1}y^{n+1} = 2(n+1)x^{m+1}y^n$

$\frac{\partial}{\partial x}(x^m y^{n+2} - x^{m+2}y^n) = m \cdot x^{m-1}y^{n+2} - (m+2) \cdot x^{m+1}y^n$ より．

$m = 0$，$2(n+1) = -(m+2)$ となる　∴ $\begin{cases} m = 0 \\ n = -2 \end{cases}$ となるので

y^{-2} が積分因子である．

ここで　$2xy^{-1}dx + (1 - x^2y^{-2})dy = 0$ を解くと．

$u(x, y) = \int 2xy^{-1}dx + w(y) = x^2y^{-1} + w(y)$ とできるが．

ここで．$\frac{\partial}{\partial y}(x^2y^{-1} + w(y)) = 1 - x^2y^{-2}$ より．　$w' = 1$ となり．$w = y$ である．

∴ $x^2y^{-1} + y = C$ が解となる

$\boxed{3}$ 特性方程式を解くと．

$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$ より $\lambda = -2 \pm i$

∴ 基本解は $e^{-2x}\sin x$，$e^{-2x}\cos x$ である．

次に推測特殊解を $y = a\sin x + b\cos x$ とすると．

$y' = -b\sin x + a\cos x$

$y'' = -a\sin x - b\cos x$ より．

$-a\sin x - b\cos x + 4(-b\sin x + a\cos x) + 5(a\sin x + b\cos x) = 4(\sin x + \cos x)$

となり $\begin{cases} 4a - 4b = 4 \\ 4a + 4b = 4 \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$ となり $y = \sin x$ が特殊解である

$\therefore y = C_1 e^{-2x}\sin x + C_2 e^{-2x}\cos x + \sin x$ となる.

$\boxed{4}$ $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^t dt = \int_0^\infty e^{(1-s)t} dt = \left[\frac{1}{1-s} e^{(1-s)t}\right]_0^\infty = \frac{1}{s-1}$

である.

$\boxed{5}$ $L(t\sin t) = -L(-t\sin t) = -\frac{d}{ds}L(\sin t) = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+1}$

$= \frac{2s}{(s^2+1)^2}$ である.

$\boxed{6}$ 両辺をラプラス変換すると.

$s^2F(s) - s - 2 - 4(sF(s) - 1) + 5F(s) = 0$ より

$(s^2 - 4s + 5)F(s) = s - 2$

$F(s) = \frac{s-2}{s^2-4s+5} = \frac{s-2}{(s-2)^2+1}$ となる

$\therefore$ 逆変換すれば

$f(t) = e^{2t} \cdot \cos t$ となる.

$\boxed{7}$ 両辺をラプラス変換する. $f'(t) = a$ とすると.

$6(s^2F(s) - a) + 11sF(s) - 10F(s) = 0$ より

$(6s^2 + 11s - 10)F(s) = 6a$

$F(s) = \frac{6a}{6s^2+11s-10} = \frac{6a}{(2s+5)(3s-2)} = \frac{6a}{19}\left(\frac{-2}{2s+5} + \frac{3}{3s-2}\right)$

$= \frac{6a}{19}\left(\frac{1}{s-\frac{2}{3}} - \frac{1}{s+\frac{5}{2}}\right)$ となる 逆変換すると.

$f(t) = \frac{6}{19}a\left(e^{\frac{2}{3}t} - e^{-\frac{5}{2}t}\right)$ となる ここで $f(1)=1$ より

$1 = \frac{6}{19}a\left(e^{\frac{2}{3}} - e^{-\frac{5}{2}}\right)$ である

$\therefore f(t) = \frac{e^{\frac{2}{3}t} - e^{-\frac{5}{2}t}}{e^{\frac{2}{3}} - e^{-\frac{5}{2}}}$ となる.