線形代数２　例題・演習問題集　その２

1. 次のベクトルの組が１次独立か判定せよ.

(1) $$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(2) $$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(3) $$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(4) $$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(5) $$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2. $\mathbb{R}^3$ の基本ベクトルの組

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

が基底であることを示せ.

3. 次の，$\mathbb{R}^2$ または $\mathbb{R}^3$ のベクトルの組が，それぞれの空間の基底であることを示せ.

(1) $$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(2) $$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(3) $$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(4) $$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

4. 次の空間の次元を求めよ．

$$
\begin{array}{ll}
(1) & V = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x+y=0\right\} \\
(2) & V = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x+2y=0\right\} \\
(3) & V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+y+z=0\right\} \\
(4) & V = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x+y=0, x+2y+w+2z=0\right\}
\end{array}
$$

5. $\mathbb{R}^3$ において，W_1 と W_2 を以下で定めるとき，$W_1, W_2, W_1 \cap W_2, W_1 + W_2$ の次元をそれぞれ求めよ．

$$
\begin{aligned}
W_1 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+2y+3z=0\right\} \\
W_2 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x=y=z\right\}
\end{aligned}
$$

6. $\mathbb{R}^4$ において，W_1 と W_2 を以下で定めるとき，$W_1, W_2, W_1 \cap W_2, W_1 + W_2$ の次元をそれぞれ求めよ．

$$
\begin{aligned}
W_1 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x+2y+z+w=0\right\} \\
W_2 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x=y, z=w\right\}
\end{aligned}
$$