解答.

1 (1) ノート参照.

(2) $\varphi_A(t)=\begin{vmatrix} t-2 & -2 \\ -1 & t-3 \end{vmatrix}=(t-2)(t-3)-2=t^2-5t+4=(t-1)(t-4)$.

固有値は1と4. 重複度は両方とも1.

$A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を解くと. $x+2y=0$ より. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(t\neq 0)$ が固有値1の固有ベクトル.

$V(1)=\left\langle\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\rangle$ なので. $\dim V(1)=1$ である.

また. $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=4\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を解くと. $x-y=0$ より $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=t\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(t\neq 0)$

が固有値4の固有ベクトル.

$V(4)=\left\langle\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\rangle$ なので. $\dim V(4)=1$ である.

(3) $\varphi_A(t)=\begin{vmatrix} t & -2 & 0 \\ 2 & t-1 & -3 \\ 0 & -2 & t \end{vmatrix}=t^2(t-1)-6t+4t=t(t^2-t-2)$

$=t(t-2)(t+1)$

固有値は0, 2, −1. 重複度は.それぞれ1.

固有値0について.

$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=0$ を解くと. $\begin{cases} 2y=0 \\ -2x+y+3z=0 \end{cases}$ より $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=t\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ $(t\neq 0)$

が固有ベクトル.

$V(0)=\left\langle\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right\rangle$ なので. $\dim V(0)=1$.

固有値2について.

$A\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=2\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ を解くと. $\begin{cases}2y=2x\\-2x+y+3z=2y\\2y=2z\end{cases}$ より $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ $(t\neq0)$

が固有ベクトル. $V(2)=\left\langle\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\rangle$ なので. $\dim V(2)=1$.

固有値 -1 について.

$A\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ を解くと. $\begin{cases}2y=-x\\-2x+y+3z=-y\\2y=-z\end{cases}$ より $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=t\cdot\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}$ $(t\neq0)$

が固有ベクトル. $V(-1)=\left\langle\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}\right\rangle$ より. $\dim V(-1)=1$.

(4) $\varphi_A(t)=\begin{vmatrix}t-1&0&-1\\0&t-1&0\\0&0&t-1\end{vmatrix}=(t-1)^3$ である. ∴ 固有値は1, 重複度は3.

$A\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ を解くと. $\begin{cases}x+z=x\\y=y\\z=z\end{cases}$ より. $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ $(t\neq0 \text{ or } s\neq0)$

が固有ベクトル. $V(1)=\left\langle\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\rangle$ であり. このベクトルは1次独立なので $V(1)$ の基底である. ∴ $\dim V(1)=2$.

(5) $\varphi_A(t)=\begin{vmatrix}t&-1\\1&t\end{vmatrix}=t^2+1=(t+i)(t-i)$ であり.

固有値は i と $-i$. 重複度はそれぞれ1である.

ここで. $A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\pm i\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ をみたすベクトルは $\mathbb{R}^2$ には(0しか)存在しない. なお. $\mathbb{C}^2$ では存在する.

2. (1), (2), (3) はノート参照.

(4) $\varphi_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -3 \\ -3 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^2 - 9 = t^2 - 2t - 8 = (t-4)(t+2)$.

∴ 固有値は 4 と −2. 異なる2つの固有値をもつので. 対角化可能である.

固有値−2の固有ベクトルは

$A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ より. $\begin{cases} x+3y=-2x \\ 3x+y=-2y \end{cases}$ となり $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $(t \neq 0)$ である

固有値4の固有ベクトルは.

$A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ より $\begin{cases} x+3y=4x \\ 3x+y=4y \end{cases}$ となり. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(t \neq 0)$ である

∴ $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ とおけば. $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ となる.

(5) $\varphi_A(t) = \begin{vmatrix} t & -1 & 0 \\ -1 & t-1 & -1 \\ 0 & -1 & t \end{vmatrix} = t^2(t-1) - 2t = t^3 - t^2 - 2t = t(t-2)(t+1)$

∴ 固有値は 0, 2, −1 であり, 対角化可能. 固有ベクトルはそれぞれ.

$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ より $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ $(t \neq 0)$

$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ より $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(t \neq 0)$

$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ より $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(t \neq 0)$ である

∴ $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ とおけば. $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ となる.

(6) II(4) より. 固有値1の重複度3. $\dim V(1)=2$ なので対角化不可能

(7) $\varphi_A(t)=\begin{vmatrix} t+3 & 0 & 0 \\ -4 & t-5 & 4 \\ -2 & -4 & t+5 \end{vmatrix} = (t+3)(t^2-25+16)=(t+3)^2\cdot(t-3)$

より. 固有値は3と-3. -3の重複度が2なので固有空間の次元を調べると.

$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -3\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ より $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ($t\neq0$ or $s\neq0$) なので

$V(-3)=\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$ これらは1次独立なので $\dim V(-3)=2$.

∴対角化可能.

rank$(-3E-A)$を調べてもよい.

固有値3の固有ベクトルは

$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ より $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ($t\neq0$) である

∴ $P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ とすれば. $P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ となる.

(8) これも.複素数の世界なら.対角化可能である.

3. (1) $\varphi_A(t)=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^3-3(\lambda-1)-2=\lambda^2(\lambda-3)$ より

固有値は0と3. 重複度は2と1.

0の固有ベクトルは

$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=0$ より $x+y+z=0$ となり. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ ($t\neq0, s\neq0$)

となる. グラムシュミットの直交化法を使えば.

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\ v_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-\sqrt{2}\end{bmatrix}$$ となる.

3の固有ベクトルは

$$A\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$ より $$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = t\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$ $(t \neq 0)$ となる.

ノルムを1にするためには $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ である ($t = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ でもOK)

$$\therefore P = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$ とすると. これは直交行列で.

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{bmatrix}$$ となる.

(2) $$\varphi_A(t) = \begin{vmatrix}t-1 & 2\\ 2 & t-1\end{vmatrix} = (t-1)^2-4 = t^2-2t-3 = (t-3)(t+1)$$ より

固有値は -1 と 3.

固有値 -1 について.

$$A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$ より $$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = t\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$ $(t\neq 0)$. ノルム1にするためには $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

固有値3について.

$$A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$ より $$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = t\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$ $(t\neq 0)$. ノルム1にするためには $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\therefore P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}$$ とすると. $$P^{-1}AP = \begin{bmatrix}-1&0\\0&3\end{bmatrix}$$ となる.

(3) $\varphi_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -1 & -2 \\ -1 & t-2 & -1 \\ -2 & -1 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^2(t-2) - 4 - 2(t-1) - 4(t-2)$

$= (t-1)^2(t-2) - 6(t-1) = (t-1)(t^2-3t+2-6) = (t-1)(t-4)(t+1)$ より

固有値は 1, 4, −1. である. 固有ベクトルでノルム1のものは.

$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ より $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(t \neq 0)$ であり $t = \frac{1}{\sqrt{6}}$

$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ より $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(t \neq 0)$ であり, $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ より $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ $(t \neq 0)$ であり $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore P = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ -2 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$ とすれば. $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ となる