解答その4

解答は省略されている部分があります.

② $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ を解くと. $y=t,\ z=s$ とおいて.

$\begin{bmatrix} -t-2s \\ t \\ s \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ となる $\therefore \ker f = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ である

このベクトルは1次独立なので基底は $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ であり $\dim \ker f = 2$ である.

③. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ を解くと $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -t \\ -t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ となる

$\therefore \ker f = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$, 基底は $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\dim \ker f = 1$ である.

④ ノート参照.

⑤ $f(v_1) = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} = 5u_1 + \frac{1}{2}u_2 = [u_1\ u_2]\begin{bmatrix} 5 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$f(v_2) = \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \end{bmatrix} = u_1 + 5u_2 = [u_1\ u_2]\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

より $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ \frac{1}{2} & 5 \end{bmatrix}$ である

⑥ $f(v_1) = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{5}{2}u_1 - \frac{7}{2}u_2 = [u_1, u_2]\begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{7}{2} \end{bmatrix}$

$f(v_2) = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} = 6u_1 - 2u_2 = [u_1\ u_2]\begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$

$f(v_3) = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = 4u_1 - u_2 = [u_1\ u_2]\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ より $A = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 6 & 4 \\ -\frac{7}{2} & -2 & -1 \end{bmatrix}$ である.

7 (1) ノート参照

(2) $v_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$ とおくと.

$\|v_1\| = \sqrt{\cos^2\theta + (-\sin\theta)^2} = 1.$

$\|v_2\| = \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = 1.$

$(v_1, v_2) = \cos\theta \cdot \sin\theta - \sin\theta \cdot \cos\theta = 0$ より $v_1 v_2$ は正規直交基底

∴直交行列である

(3) $v_1 = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, $v_2 = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$, $v_3 = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 4\sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$ とおくと.

$\|v_1\| = \|v_2\| = \|v_3\| = 1$ と

$(v_1, v_2) = (v_1, v_3) = (v_2, v_3) = 0$ が示せる.

∴直交行列である

8 $v_1 = \begin{bmatrix} a \\ a \\ a \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -b \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} -c \\ -c \\ 2c \end{bmatrix}$ が正規になるようにすればよいので.

$a = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $c = \frac{1}{\sqrt{6}}$ である