# 解答 その1

1. $^\forall \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ と $^\forall r, s \in \mathbb{R}$ に対して.

I (1) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1+x_1 \\ y_2+x_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$ となる

(2) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_1+y_1)+z_1 \\ (x_2+y_2)+z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+(y_1+z_1) \\ x_2+(y_2+z_2) \end{bmatrix}$

$= \boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ となる

(3) $\boldsymbol{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ とすると. $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0} = \begin{bmatrix} x_1+0 \\ x_2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}$ となり零ベクトルが存在する

(4) $-\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}$ とすると $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_1+(-x_1) \\ x_2+(-x_2) \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$ となり逆ベクトルが存在する.

II (1). $(r+s)\boldsymbol{x} = (r+s)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r+s)x_1 \\ (r+s)x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rx_1+sx_1 \\ rx_2+sx_2 \end{bmatrix} = r\boldsymbol{x}+s\boldsymbol{x}$ となる

(2) $r(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} r(x_1+y_1) \\ r(x_2+y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rx_1+ry_1 \\ rx_2+ry_2 \end{bmatrix} = r\boldsymbol{x}+r\boldsymbol{y}$ となる

(3) $(rs)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} (rs)x_1 \\ (rs)x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(sx_1) \\ r(sx_2) \end{bmatrix} = r\cdot(s\boldsymbol{x})$ となる

(4) $1\cdot\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1\cdot x_1 \\ 1\cdot x_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}$. となる.

以上より $\mathbb{R}^2$は線形空間である.

2. 1と同様なので省略.

3. 零ベクトルは $\boldsymbol{0} = 0$ (多項式としての $0$)

$-p(x) = -a_0 - a_1 x - \cdots - a_n x^n$ が逆ベクトルである.

4. ノートを参照

5. $-x$ と $-x'$ が逆ベクトルとすると.

$-x = -x + \mathbb{0} = -x + (x + (-x')) = (-x + x) + (-x') = \mathbb{0} + (-x') = -x'$

となり逆ベクトルが1つであることがわかる.

6. $0 \cdot x = (0+0)x = 0x + 0 \cdot x$ となる. この両辺に $-0x$ を足すと.

$\mathbb{0} = 0 \cdot x$ となる

7. $(-1) \cdot x + x = (-1) \cdot x + 1 \cdot x = ((-1)+1)x = 0 \cdot x = \mathbb{0}$ より

$(-1) \cdot x$ は $x$ の逆ベクトルである.

8. $\forall x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ と $\forall r \in \mathbb{R}$ に対し.

$x + y = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $rx = \begin{bmatrix} rx_1 \\ rx_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ となり部分空間となる.

9. ノートを参照

10. $(1.4) = a(2.3) + b(3.1)$ とすると.

$\begin{cases} 2a + 3b = 1 \\ 3a + b = 4 \end{cases}$ より $\begin{array}{l} a = \frac{11}{7} \\ b = -\frac{5}{7} \end{array}$ となる $\therefore$ $v = \frac{11}{7}u - \frac{5}{7}w$ とできる.

11. $(1, 4, -3) = a(2, 3, 2) + b(-1, 0, 2)$ とすると.

$\begin{array}{l} 2a - b = 1 \\ 3a \quad\ \ = 4 \\ 2a + 2b = -3 \end{array}$ より 解なし となる $\therefore$ $v$ は $u$ と $w$ の1次結合で表されない.

12. $(1,2,3)=r(2,1,5)+s(1,0,a)$ より

$$\begin{cases} 2r+s=1 \\ r=2 \\ 5r+as=3 \end{cases}$$ である. これより $$\begin{cases} r=2 \\ s=-3 \\ a=\frac{7}{3} \end{cases}$$ となる.

13. ノート参照

14. $x+y+z=0$ を解くと.

$A=(1\ 1\ 1)$ を係数行列とすると. $\mathrm{rank}A=1$ より自由度は2である.

$\therefore y=t,\ z=s$ とおけば, $x=-t-s$ となる.

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -t-s \\ t \\ s \end{bmatrix}=t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ となり.

$$W=\left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right.$$ となる

15. $x=y=z$ を解くが. $x=y=z$ は $\begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \end{cases}$ ということなので.

係数行列 $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ とすると $\mathrm{rank}A=2$ より自由度は1である

$\therefore z=t$ とおくと, $x=t,\ y=t$ より.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix}=t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ となり $W=\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ となる

16. $\begin{cases} x+y+z+w=0 \\ x+2y+z+2w=0 \end{cases}$ を解くと.

$$\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}=2$$ より

自由度は2であり、$\begin{cases} x+y+z+w=0 \\ y+w=0 \end{cases}$ となる

ここで、$z=t,\ w=s$ とおくと、

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ -s \\ t \\ s \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ となり、$W = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ となる。

17. $W$ の元として、$(1,0,0)$ と $(0,1,0)$ をとると、

$(1,0,0)+(0,1,0)=(1,1,0)$ は $W$ に入らない。

$\therefore$ $W$ は部分空間ではない。

18. ノート参照

19. $W_1 \cap W_2 = \{(x,y,z) \mid x-2y+3z=0,\ x=y=z=0\}$ より

右の方程式を解くと、係数行列 $A$ は

$$\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 3$$

より自由度は0。$\therefore$ 解は $\mathbf{0}$ のみ。$\therefore$ $W=\{\mathbf{0}\}$ となる

20. $W_1 \cap W_2 = \{(x,y,z,w) \mid x+2y-z-2w=0,\ x=y\}$ を解くと、

自由度2より $y=t,\ w=s$ として、$x=t,\ z=3t-2s$ より

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ 3t-2s \\ s \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$ となり $W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

である。