# 線形代数学２　平成27年度前期　期末試験問題

注意：解答の順番は問わないが，どの問題を解いているか分かるように書くこと．

1. $\mathbb{R}^4$ において，$W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+w=0, x+2y+z+2w=0\}$ を $\langle u, v \rangle$ の形で表せ．(12 点)

2. 次の $\mathbb{R}^3$ のベクトルの組が基底であることを示せ．(12 点)

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. 次のベクトルの組から，グラムシュミットの直交化法を用い，正規直交基底を作れ．(12 点)

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

4. 次の $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 $f$ について，$\mathrm{ker} f$ の基底と次元を求めよ．(12 点)

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

5. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

と定めるとき，基底 $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ と基底 $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ に関する $f$ の表現行列を求めよ．(12 点)

6. 行列 $A$ が，対角化不可能であることを示せ．(10 点)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

7. 次の行列 $B$ を以下の順序で対角化せよ．(30 点)

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $B$ の固有値を求めよ．

(2) 各固有値に属する固有ベクトルと固有空間の次元をそれぞれ求めよ．

(3) 行列 $B$ が対角化可能である理由を述べよ．

(4) $B$ を対角化する行列 $P$ とその逆行列 $P^{-1}$ を求めよ．

(5) $P^{-1}BP$ を計算せよ．