線形代数学II　解答例

[1] $\begin{cases} x+y+z+w=0 \\ x+2y+z+2w=0 \end{cases}$ をとくと. 係数行列 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ の rank は

$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$ より 自由度 2.

∴ $x=t, y=s$ とおけば, $w=-y=-s$, $z=-x=-t$ より

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ s \\ -t \\ -s \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ となる. ∴ $\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$ である

[2] 1次独立であることは

$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$ よりわかる.

また生成系であることは

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ をといて.

$\begin{cases} a+b+c=x \\ a+2b+c=y \\ 3b+c=z \end{cases}$ より　$b=y-x$, $c=z-3b=3x-3y+z$.

$a=x-b-c=x+x-y-3x+3y-z=-x+2y-z$.

∴ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (-x+2y-z)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (y-x)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (3x-3y+z)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

となるので示された. 以上より基底であることがわかる

3. まず $\|v_1\| = 2$ より $x_1 = \frac{1}{2}v_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ とする

次に $y_2 = v_2 - \langle x_1, v_2 \rangle x_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ とし.

$\|y_2\| = \sqrt{2}$ より. $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ とする.

さいごに $y_3 = v_3 - \langle x_1, v_3 \rangle x_1 - \langle x_2, v_3 \rangle x_2$

$= \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$ とし.

$\|y_3\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ より $x_3 = \sqrt{2}\,y_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$ とする.

上記の x_1, x_2, x_3 が求める正規直交基底である.

4. $\begin{bmatrix}3&2&1\\2&1&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = 0$ をとくと

$\mathrm{rank}\begin{bmatrix}3&2&1\\2&1&1\\1&1&0\end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix}1&1&0\\2&1&1\\3&2&1\end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&-1&1\end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$

$= 2$ より 自由度は 1 である.

今 $x = t$ とおくと. $y = -x = -t$, $z = -y - 2x = -t$ より

$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}t\\-t\\-t\end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}$ となる $\therefore \ker f = \left\langle \begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix} \right\rangle$ より基底は $\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}$, 次元は 1 である

[5]
$$f(v_1)=\begin{bmatrix}3&2&3\\1&5&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-1\end{bmatrix}=6\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}-7\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=[v_1,\ v_2]\begin{bmatrix}6\\-7\end{bmatrix}$$

$$f(v_2)=\begin{bmatrix}3&2&3\\1&5&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\4\end{bmatrix}=8\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=[v_1,\ v_2]\begin{bmatrix}8\\-4\end{bmatrix}$$

$$f(v_3)=\begin{bmatrix}3&2&3\\1&5&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=[v_1,\ v_2]\begin{bmatrix}5\\-2\end{bmatrix}$$

となる. ∴求める表現行列は $\begin{bmatrix}6&8&5\\-7&-4&-2\end{bmatrix}$ である.

[6] $\varphi_A(t)=\begin{vmatrix}t-2&0&-1\\0&t-1&0\\0&0&t-2\end{vmatrix}=(t-2)^2\cdot(t-1)$ より 固有値は 1と2である.

ここで $V(2)$ を調べると.

$\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=0$ より. $y=z=0$ ∴ $V(2)=\left\langle\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\rangle$ となり

$\dim V(2)=1\neq 2=$ (固有値2の重複度) となるので. 対角化不可能である.

[7] (1) $\varphi_B(t)=\begin{vmatrix}t&2&-2\\-1&t+3&-1\\-2&2&t\end{vmatrix}=t^2(t+3)+4+4+2t+2t-4(t+3)$

$=t^3+3t^2-4=(t-1)(t^2+4t+4)=(t-1)(t+2)^2$

より 固有値は 1と −2.

(2) $V(1)$ を調べると.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$ より. $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$ となる. $\therefore y = t$ とおくと. $z = 2y = 2t$.

$x = -2y + 2z = -2t + 4t = 2t$ より

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ t \\ 2t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$ $(t \neq 0)$ が固有ベクトル.

$V(1) = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$ より $\dim V(1) = 1$ である.

次に $V(-2)$ を調べると.

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$ より $$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$ となる.

$\therefore x = t,\ y = s$ とおくと $z = -x + y = -t + s$ となる.

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ s \\ -t+s \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ $((t, s) \neq (0, 0))$ が固有ベクトル.

$V(-2) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ となる. ここで $\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$ より

このベクトルは1次独立. $\therefore \dim V(-2) = 2$ となる.

(3). 各固有値の重複度と. 固有空間の次元が一致するので

対角化可能

(4) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ とすると．

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$ より $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(5) $$P^{-1}BP = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -4 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となる．