内積と正規直交基底

$\forall x, y$ に対し、実数 (x, y) が定まり、次の条件をみたすとき、(x, y) を x と y の内積という。以下 $x, y, z \in V$, $r \in \mathbb{R}$ とする。

(1) $(x, x) \geq 0$, かつ $(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$

(2) $(x, y) = (y, x)$　　スカラーが複素数なら $(x, y) = \overline{(y, x)}$

(3) $(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$

$(x, y+z) = (x, y) + (x, z)$

(4) $(rx, y) = (x, ry) = r(x, y)$　　複素数なら $(x, ry) = \bar{r}(x, y)$

例1. $\mathbb{R}^n \ni x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ に対し、

$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$ とすると、これは内積の定義をみたす。

この内積を $\mathbb{R}^n$ の標準内積といい、$\mathbb{R}^n$ にこの内積を与えた空間をユークリッド空間という。

→ 高校で習った内積は、この標準内積である。

一般に、内積があると、ベクトルの長さと角度が定義できる。

定義4.8. $\forall x, y \in V$ に対し、

$\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$ をベクトル x の長さあるいはノルムという。

$\cos\theta = \dfrac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$ をみたす θ を x と y のなす角という。

とくに $\theta = \frac{\pi}{2}$、つまり $(x, y) = 0$ のとき、x と y は直交するという。

例2. $\mathbb{R}^2$ において. $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ のとき.

$\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}} = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}$ である. これは普通のベクトルの長さになる.

なす角θも. 同様である.

例3. $[0, 2\pi]$ 上の連続関数 f, g に対し.

$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x) g(x)\, dx$ で内積を定義できる.

∵ (1) $(f, f) = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \geq 0$. かつ. $(f, f) = 0 \Rightarrow f = 0$ もわかる.

(2) $(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x) g(x)\, dx = \int_0^{2\pi} g(x) \cdot f(x)\, dx = (g, f)$

(3) $(f+g, h) = \int_0^{2\pi} (f(x) + g(x)) h(x)\, dx = \int_0^{2\pi} f(x) h(x)\, dx + \int_0^{2\pi} g(x) h(x)\, dx$

$= (f, h) + (g, h)$ 　　2式も同様.

(4) $(r \cdot f, g) = \int_0^{2\pi} r f(x) g(x)\, dx = r \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x)\, dx = r(f, g)$, 2式も同様//

⟶ つまり関数にも長さや角度が定義できる.

定義4.9. $x_1, \cdots, x_n \in V$ が $(x_i \neq 0)$

$(x_i, x_j) = 0$ 　　$(i \neq j)$ をみたすとき, $x_1, \cdots, x_n$ を直交系であるという.

さらに. $(x_i, x_i) = 1$ 　　$(1 \leqq i \leqq n)$ をみたすとき, 正規直交系であるという.

さらに. $x_1, \cdots, x_n$ が基底のとき, 正規直交基底という.

定理(参考) $x_1, \cdots, x_n \in V$ が V の正規直交基底のとき. $\forall x \in V$ は

$x = \sum_{i=1}^{n} (x, x_i) \cdot x_i$ とできる. これは $n = \infty$ でも(ある意味で)成り立つ.

⟶ フーリエ級数のもとになっている.

命題4.18

直交系 $x_1,\cdots,x_n\in V$ は 1次独立である

∵ $r_1x_1+\cdots+r_nx_n=0$ とすると.

$0=(r_1x_1+\cdots+r_nx_n, x_1)=r_1(x_1,x_1)+r_2(x_2,x_1)+\cdots+r_n(x_n,x_1)=r_1$

となる. 同様にして. $r_2=r_3=\cdots=r_n=0$ となる //.

命題 4.20

$x_1,\cdots,x_n\in V$ が 1次独立なら.

正規直交系 $y_1,\cdots,y_n$ で. $\langle x_1,\cdots,x_n\rangle=\langle y_1,\cdots,y_n\rangle$ となるものが作れる.

∵ $y_1=\dfrac{x_1}{\|x_1\|}$ とすれば. $(y_1,y_1)=\left(\dfrac{x_1}{\|x_1\|},\dfrac{x_1}{\|x_1\|}\right)=\dfrac{1}{\|x_1\|^2}(x_1,x_1)=1$ となる.

このように. ベクトルを自分の長さでわると. 長さ1 (単位ベクトル) になる.

この方法を 正規化 という.

次に. $y_2'=x_2-(x_2,y_1)y_1$ とおくと. x_1,x_2 が 1次独立より. $y_2'\neq 0$ である.

ここで $y_2=\dfrac{y_2'}{\|y_2'\|}$ とおくと. $\|y_2\|=1$ であり

$$(y_1,y_2)=\left(y_1, \frac{1}{\|y_2'\|}\cdot(x_2-(x_2,y_1)y_1)\right)$$

$$=\frac{1}{\|y_2'\|}\left((y_1,x_2)-(x_2,y_1)(y_1,y_1)\right)=0$$

となり. y_1 と y_2 は直交.

さらに. $\langle x_1,x_2\rangle\ni y_1,y_2$ かつ. $\dim\langle x_1,x_2\rangle=\dim\langle y_1,y_2\rangle=2$ より

$\langle x_1,x_2\rangle=\langle y_1,y_2\rangle$ もわかる.

次に $y_3'=x_3-(x_3,y_1)y_1-(x_3,y_2)y_2$, $y_3=\dfrac{y_3'}{\|y_3'\|}$ とする.

以下. $y_n'=x_n-\sum_{i=1}^{n-1}(x_n,y_i)y_i$, $y_n=\dfrac{y_n'}{\|y_n'\|}$ とすればよい. //

この方法を グラムシュミットの直交化法 という.

例 6 (1).

$\|v_1\| = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$ より. $y_1 = \frac{1}{2} v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ となる.

次に. $y_2' = v_2 - (v_1, y_1) y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ である

$\|y_2'\| = \sqrt{2}$ より. $y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ となる.

次に. $y_3' = v_3 - (v_3, y_1) y_1 - (v_3, y_2) y_2$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ である

$\|y_3'\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ より $y_3 = \sqrt{2} \cdot y_3' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ となる.

この y_1, y_2, y_3 が正規直交基底となる.

問 6 (2), (3)