基底変換と行列

成分表示 $\{u_1, \cdots, u_n\}$ をVの基底とすると、$^\forall x \in V$ は

$$x = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots + x_n u_n = [u_1 \cdots u_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ と表せる。

この表し方は一通りであり、また $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ を $\{u_1, \cdots, u_n\}$ に関する x の**成分表示**という。

一通りであること：もし、$x = y_1 u_1 + \cdots + y_n u_n$ と表せたとすると、

$0 = x - x = (x_1 - y_1)u_1 + \cdots + (x_n - y_n)u_n$ となるが、1次独立性から $x_i = y_i$ //

また、$x = [u_1 \cdots u_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ と $y = [u_1 \cdots u_n]\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$ に対し、

$$x + y = [u_1 \cdots u_n]\begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}, \quad rx = [u_1 \cdots u_n]\begin{bmatrix} rx_1 \\ \vdots \\ rx_n \end{bmatrix}$$ となり、

$x \in V$ を $x \in \mathbb{R}^n$ であるかのように扱える。

例題 $\boxed{1}$ (1)

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = [v_1 \ v_2 \ v_3]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$ より

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$ となり

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{3}{2}, \quad x_3 = \frac{1}{2}$$ となる

$\therefore x = [v_1 \ v_2 \ v_3] \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ であり、成分表示は $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ となる。

問題 $\boxed{1}$ (2), (3) $\boxed{2}$.

基底の変換行列

$\{v_i\}, \{u_i\}$ と略記

$\{v_1, \cdots, v_n\}$ と $\{u_1, \cdots, u_n\}$ を V の基底とすると.

$$u_1 = p_{11}v_1 + p_{21}v_2 + \cdots + p_{n1}v_n$$

$$u_2 = p_{12}v_1 + p_{22}v_2 + \cdots + p_{n2}v_n$$

$$\vdots$$

$$u_n = p_{1n}v_1 + p_{2n}v_2 + \cdots + p_{nn}v_n$$

とできる. これを行列で表すと.

$$[u_1 \cdots u_n] = [v_1 \cdots v_n]\underbrace{\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}}_{=P}$$

と表せる.

この P を $\{v_i\}$ から $\{u_i\}$ への基底の変換行列という.

これを $P: \{v_i\} \to \{u_i\}$ と略記

定理4.16.

(1) $\{u_i\}$ から $\{u_i\}$ への基底の変換行列は単位行列.

(2) $P: \{v_i\} \to \{u_i\}$, $Q: \{w_i\} \to \{v_i\}$, $R: \{w_i\} \to \{u_i\}$ とすると.

$R = QP$ である.

(3). $P: \{v_i\} \to \{u_i\}$, $Q: \{u_i\} \to \{v_i\}$ とすると $Q = P^{-1}$.

∵ (1)

$$[u_1 \cdots u_n] = [u_1 \cdots u_n]\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

よりわかる.

(2) $[u_1 \cdots u_n] = [v_1 \cdots v_n]P = [w_1 \cdots w_n]QP$ よりわかる.

(3) (1)と(2) より $PQ = E$ となる.

命題4.17 $P: \{u_i\} \to \{v_i\}$ とする. x の $\{v_i\}$ に関する成分表示を

$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ とするとき. $\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ は. $\{u_i\}$ に関する成分表示である

(∵)

$$[u_1 \cdots u_n]\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = [u_1 \cdots u_n]P\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [v_1 \cdots v_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x$$

より示せた//.

例3 $[v_1\ v_2\ v_3] = [u_1\ u_2\ u_3]P$ より

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix} P$$

となり

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 8 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 9 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 6 & 8 & 8 \\ 3 & -1 & -1 \\ 6 & -12 & 18 \end{bmatrix}$$

である. また 1 (1) の結果から.

$$P \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 6 & 8 & 8 \\ 3 & -1 & -1 \\ 6 & -12 & 18 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 44 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 22 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

が $\{u_i\}$ に関する成分表示である.

問 4 ~ 6