対称行列の対角化

命題6.8

対称行列の固有値は全て実数である

∵ 注. $\mathbb{C}^n$にも内積を定義できて.

$(x, y) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n}$ となる. これより

$(x, y) = \overline{(x, y)}$

$(\lambda x, y) = \lambda(x, y) = (x, \overline{\lambda} y)$ が成り立つ.

今. $Ax = \lambda x$ $(x \neq 0)$ とすると.

$(Ax, x) = (\lambda x, x) = \lambda(x, x)$

$\parallel$

$(x, {}^tAx) = (x, Ax) = (x, \lambda x) = \overline{\lambda}(x, x)$ ∴ $\lambda = \overline{\lambda}$ となる //.

命題6.9. 対称行列の異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する.

∵ $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$ $(x \neq 0, y \neq 0, \lambda \neq \mu)$ とすると.

$\lambda(x, y) = (\lambda x, y) = (Ax, y) = (x, {}^tAy) = (x, Ay) = (x, \mu y)$

$= \mu(x, y)$ となる. $\lambda \neq \mu$ より $(x, y) = 0$ である /

定理6.10.

対称行列は直交行列によって対角化可能である.

∵ 帰納法で示す.

$n=1$ のときは $A = [a]$ なので $P = E_1 = [1]$ とすればよい.

$n-1$まで成り立つと仮定し、nのときを示す。

λ_1をAの固有値，p_1を$\|p_1\|=1$をみたす固有ベクトルとする．

グラム・シュミットの直交化法から，$p_1, \cdots, p_n$が正規直交基底になるよう$p_2, \cdots, p_n$がとれ．

$P=[p_1 \cdots p_n]$とおくと、これは直交行列（定理4.25）である．

$\therefore$ ${}^tP=P^{-1}$が成り立つ．さらに、

$$P^{-1}AP={}^tPA[p_1 \cdots p_n]={}^tP[Ap_1 \cdots Ap_n]$$

$$=\begin{bmatrix} (p_1, Ap_1) & (p_1, Ap_2) & \cdots & (p_1, Ap_n) \\ (p_2, Ap_1) & (p_2, Ap_2) & \cdots & (p_2, Ap_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (p_n, Ap_1) & (p_n, Ap_2) & \cdots & (p_n, Ap_n) \end{bmatrix}$$ である．

補題．$X=[x_1\, x_2 \cdots x_n]$　$Y=[y_1\, y_2 \cdots y_n]$とすると．

$${}^tXY=\begin{bmatrix} (x_1, y_1) & \cdots & (x_1, y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_n, y_1) & \cdots & (x_n, y_n) \end{bmatrix}$$ である．

$\because$ $x_i=\begin{bmatrix} x_{1i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{bmatrix}$　$y_i=\begin{bmatrix} y_{1i} \\ \vdots \\ y_{ni} \end{bmatrix}$とすると．

$${}^tXY=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} x_{11}y_{11}+x_{21}y_{21}+\cdots+x_{n1}y_{n1} & \cdots & x_{11}y_{1n}+\cdots+x_{n1}y_{nn} \\ x_{12}y_{11}+x_{22}y_{21}+\cdots+x_{n2}y_{n1} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \\ x_{1n}y_{11}+x_{2n}y_{21}+\cdots+x_{nn}y_{n1} & \cdots & x_{1n}y_{1n}+\cdots+x_{nn}y_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (x_1, y_1) & \cdots & (x_1, y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_n, y_1) & \cdots & (x_n, y_n) \end{bmatrix}$$

である

今，$(p_i, Ap_1) = (p_i, \lambda_1 p_1) = \lambda_1 (p_i, p_1) = \begin{cases} 0 & (i \neq 1) \\ \lambda_1 & (i = 1) \end{cases}$ より

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & (p_1, Ap_2) & \cdots & (p_1, Ap_n) \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & (p_n, Ap_2) & \cdots & (p_n, Ap_n) \end{bmatrix}$$ となる．

ここで ${}^t(P^{-1}AP) = {}^t({}^tPAP) = {}^tP\,{}^tAP = {}^tPAP$ なので．

$P^{-1}AP$ も対称行列．

$$\therefore\ P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (p_2, Ap_2) & \cdots & (p_2, Ap_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & (p_n, Ap_2) & \cdots & (p_n, Ap_n) \end{bmatrix}$$ となる．さらに

B とおく．

B は $n-1$ 次の対称行列より．直交行列 Q で対角化できる．

さらに．$R = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right]$ とおくと．これは直交行列で．

$$R^{-1}P^{-1}APR = R^{-1}\left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right]R = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & Q^{-1}BQ \end{array}\right]$$ と対角化できる．

PR は直交行列 なので．定理は示せた //．

例 ③(1)（解答は第十一回の解答にある）

問 ③(2), (3)