行列の対角化.

$n \times n$ 行列 A が 正則行列 P を使って

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{bmatrix}$$ とできるとき.

A は対角化可能,といい. A は P によって対角化されるという.

定理6.6. $\varphi_A(t) = (t-\lambda_1)^{n_1} \cdot (t-\lambda_2)^{n_2} \cdot \cdots \cdot (t-\lambda_k)^{n_k}$ であるとする.

ただし. $\lambda_i \neq \lambda_j$ $(i \neq j)$, $n_i \geq 1$, $n_1+n_2+\cdots+n_k = n$ とする. このとき次は同値

(1) A は対角化可能

(2) n 個の1次独立な A の固有ベクトルが存在

(3) $\mathbb{R}^n = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_k)$

$V_1 \oplus V_2 = \{x+y \mid x \in V_1, y \in V_2\}$ かつ $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

(4) $\dim V(\lambda_i) = n_i$

(5) $\mathrm{rank}(\lambda_i E - A) = n - n_i$

∵ (1)⇒(2) 正則行列 P が存在して.

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{bmatrix}$$ とできたとする. $P = [p_1\ p_2 \cdots p_n]$ と表すと.

$$AP = P \cdot \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix} = [p_1\ p_2 \cdots p_n] \begin{bmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{bmatrix} = [a_1p_1\ a_2p_2 \cdots a_np_n]$$ である. 一方

$AP = A \cdot [p_1\ p_2 \cdots p_n] = [Ap_1\ Ap_2 \cdots Ap_n]$ であるので. $Ap_i = a_ip_i$ である

∴ p_i は固有ベクトル. また p は正則なので. $p_1, \cdots, p_n$ は1次独立である. (系4.6)

(2)⇒(3) $p_1,\cdots,p_n$ を1次独立な固有ベクトルとすると．

$p_1,\cdots,p_n$ は $V(\lambda_1),\cdots,V(\lambda_k)$ のいずれかに含まれる．

また，定理6.4より $V(\lambda_i)\cap V(\lambda_j)=\{0\}$ より

$$\mathbb{R}^n \supset V(\lambda_1)\oplus V(\lambda_2)\oplus\cdots\oplus V(\lambda_k)\supset\langle p_1,\cdots,p_n\rangle=\mathbb{R}^n.$$

∴ $\mathbb{R}^n = V(\lambda_1)\oplus\cdots\oplus V(\lambda_k)$ である

(3)⇒(4) $\mathbb{R}^n = V(\lambda_1)\oplus\cdots V(\lambda_k)$ より．

$n=\dim V(\lambda_1)+\dim V(\lambda_2)+\cdots+\dim V(\lambda_k)$ （系4.14） である．

さらに，定理6.5より $\dim V(\lambda_i)\geqq n_i$ であり，かつ

$n_1+n_2+\cdots+n_k=n$ より $\dim V(\lambda_i)=n_i$ でなければいけない

(4)⇔(5) $\dim V(\lambda_i)=n-\mathrm{rank}(\lambda_iE-A)$ より

$$\dim V(\lambda_i)=n_i \iff n-\mathrm{rank}(\lambda_iE-A)=n_i$$

$$\iff \mathrm{rank}(\lambda_iE-A)=n-n_i$$ である

(4)⇒(1) $V(\lambda_i)$ の基底を $p_{i1},p_{i2},\cdots,p_{in_i}$ とする．ここで．

$P=[p_{11}\,p_{12}\cdots p_{1n_1}\,p_{21}\,p_{22}\cdots p_{2n_2}\,p_{31}\cdots p_{kn_k}]$ とおくと．これは正則行列で （系4.6）

p_{ij} は上の左からm番目のもの

$$P^{-1}AP\cdot e_m=P^{-1}A\cdot p_{ij}=\lambda_i\cdot P^{-1}p_{ij}=\lambda_i e_m$$

$Pe_m=p_{ij}$ より $e_m=P^{-1}p_{ij}$

これを行列で表すと．

$$\begin{bmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ <m\\ \\ \\ \end{array}=\begin{bmatrix}b_{1m}\\ b_{2m}\\ \vdots\\ b_{nm}\end{bmatrix}=\lambda_i\cdot\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\ <m\\ \\ \\ \end{array}$$

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\overbrace{\lambda_1\ \ddots\ \lambda_1}^{n_1\text{個}} & & & 0\\ & \overbrace{\lambda_2\ \ddots\ \lambda_2}^{n_2\text{個}} & & \\ & & \lambda_3\ \ddots & \\ 0 & & & \lambda_k\end{bmatrix}$$ となる

なので m列目は，m番目に λ_i，他に0が入る

//.

$\longrightarrow$ Aを対角化するPを作るには.

n個の1次独立な固有ベクトルを並べればよい!!!

系6.7. Aが相異なるn個の固有値をもてば. Aは対角化可能.

∵ 定理6.4 (3) より. $\dim V(\lambda_i)=1$, 重複度1となるので. 上の(4)が成立する.

例 対角化可能か判定し. 可能なら対角化せよ.

(1) $A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ (2) $A=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ (3) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

答 (計算の多くは省略しているが. テストなどではきちんと書くこと)

(1) $\varphi_A(t)=\begin{vmatrix} t-2 & 2 & 0 \\ -1 & t+3 & -1 \\ 0 & 2 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)^2(t+3)+4(t-2)=(t-2)(t+2)(t-1)$

より固有値は 1. 2. −2 である.

異なる3つの固有値をもつので対角化可能. ここで.

$V(1)=\left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$, $V(2)=\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$, $V(-2)=\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ である. これより

$P=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ とおけば $P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ となる.

(2) $\varphi_A(t)=\begin{vmatrix} t & 2 & -2 \\ -1 & t+3 & -1 \\ -2 & 2 & t \end{vmatrix} = t^2(t+3)+8+4t-4(t+3)$

$= t^3+3t^2-4=(t-1)(t^2+4t+4)=(t-1)(t+2)^2$

より固有値は 1と−2. である. ここで.

$V(1)=\left\langle \begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix} \right\rangle$ $V(-2)=\left\langle \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \right\rangle$ より.

$\dim V(1)=1$, $\dim V(-2)=2$ となり.各重複度に一致する ∴対角化可能.

ここで $P=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&0&1\\2&-1&1\end{bmatrix}$ とおけば、$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$ となる

(3) $\varphi_A(t)=(t-1)^3$ より 固有値は1. ここで

$V(1)=\left\langle \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \right\rangle$ より $\dim V(1)=1$ であるが.重複度と一致しないので.
対角化不可能である.

問.2 (4)~(8)