固有ベクトルと固有空間

$(\lambda E - A)x = 0$

固有ベクトルは　$Ax = \lambda x$　$(x \neq 0)$ をみたすベクトルであった。

この固有ベクトル全てと $\mathbf{0}$ からなる部分空間

$$V(\lambda) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid (\lambda E - A)x = 0 \} = \ker(\lambda E - A)$$

を、固有値λに属する固有空間という

例 ①(1) 固有ベクトルと固有空間の次元を求める

前回のノートから固有値は 1, 2, −2 であった。

固有値 1 の固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$ をみたすベクトルなので、 $$\begin{cases} x + 2y - z = x \\ x + z = y \\ 2y = z \end{cases}$$ である

これを解くと、$y = t$ とおいて、

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ 2t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$ となる　$\therefore\ t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $(t \neq 0)$ が固有ベクトルであり

$$V(1) = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$$ である　$\therefore \dim V(1) = 1$　となる

固有値 2 の固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$ より $$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ $(t \neq 0)$ である

$$\therefore V(2) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$, $\dim V(2) = 1$ である。

固有値-2の固有ベクトルは.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -2\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (t \neq 0) \text{ である.}$$

$$\therefore V(-2) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad \dim V(-2) = 1 \quad \text{である.}$$

次の2つの定理は証明なしで用いる. Aは$n \times n$行列とする

定理5.6. (P138)

$$n = \dim \mathbb{R}^n = \dim \mathrm{Im} A + \dim \ker A.$$

定理5.11. (P147)

$$\mathrm{rank} A = \dim \mathrm{Im} A. \quad \text{が成り立つ.}$$

命題6.2. Aは$n \times n$行列. Pはn次正則行列とすると. 次が成り立つ.

(1) $\varphi_A(t) = \varphi_{P^{-1}AP}(t)$

(2) Aの固有値と$P^{-1}AP$の固有値は. 重複度もこめて等しい.

(3) λがAの固有値なら.

$$\dim V(\lambda) = n - \mathrm{rank}(\lambda E - A)$$

☺ (1)
$$\begin{aligned} \varphi_{P^{-1}AP}(t) &= |tE - P^{-1}AP| = |tP^{-1}EP - P^{-1}AP| \\ &= |P^{-1}(tE-A)P| = |P^{-1}|\cdot|tE-A|\cdot|P| \\ &= |P|^{-1}|tE-A|\cdot|P| = |tE-A| = \varphi_A(t) \end{aligned}$$

(2) (1)より明らか.

(3) $n = \dim\ker(\lambda E - A) + \dim \mathrm{Im}(\lambda E - A)$ （定理5.6より）

$= \dim\ker(\lambda E - A) + \mathrm{rank}(\lambda E - A)$ （定理5.11より）

$\therefore \dim V(\lambda) = \dim\ker(\lambda E - A) = n - \mathrm{rank}(\lambda E - A)$ となる.

<u>定理6.4.</u> A は $n\times n$ 行列とすると次が成立

(1) Aの異なる固有値に属する固有ベクトルは1次独立.

(2) λ_i, λ_j が A の異なる固有値なら. $V(\lambda_i) \cap V(\lambda_j) = \{0\}$.

(3) $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ が Aの異なる固有値なら. $\dim V(\lambda_i) = 1$.

$\because$ (1) 帰納法を使う.

ベクトルが1つだけのときは1次独立.

次に. $\lambda_1, \cdots, \lambda_{k+1}$ を異なる固有値, $x_1, \cdots, x_{k+1}$ をそれぞれの固有ベクトルとする.

$x_1, \cdots, x_k$ が1次独立を仮定して. $x_1, \cdots, x_{k+1}$ が1次独立を示す.

まず. $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{k+1}x_{k+1} = 0$ とする.

$x_1, \cdots, x_k$の1次独立性.

もし $a_{k+1} = 0$ なら. $a_1x_1 + \cdots + a_kx_k = 0$ となり. $a_1 = \cdots = a_k = 0$ である

なので $a_{k+1} \neq 0$ とすると.

$b_i = -\dfrac{a_i}{a_{k+1}}$ とおいた.

$$x_{k+1} = -\frac{a_1}{a_{k+1}}x_1 - \frac{a_2}{a_{k+1}}x_2 - \cdots - \frac{a_k}{a_{k+1}}x_k = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_kx_k$$ とできる.

ここで. $Ax_{k+1} = b_1Ax_1 + b_2Ax_2 + \cdots + b_kAx_k$. より

$\lambda_{k+1}x_{k+1} = b_1\lambda_1x_1 + b_2\lambda_2x_2 + \cdots + b_k\lambda_kx_k$ である. 一方 λ_{k+1} をかけると.

$\lambda_{k+1}x_{k+1} = b_1\lambda_{k+1}x_1 + b_2\lambda_{k+1}x_2 + \cdots + b_k\lambda_{k+1}x_k$ となる. これをひくと.

$0 = b_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})x_1 + b_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1}) + \cdots + b_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})x_k$. となる.

∴ 1次独立性から. $b_1(\lambda_1-\lambda_{k+1})=\cdots=b_k(\lambda_k-\lambda_{k+1})=0$ となる.

しかし, $\lambda_1,\cdots,\lambda_{k+1}$ は異なる固有値なので. $b_1=\cdots=b_k=0$ となり.

$x_{k+1}=0$ となるが. これは矛盾. ∴ $a_{k+1}=0$

(2) $V(\lambda_j)\cap V(\lambda_i)\neq\{0\}$ なら $V(\lambda_j)\cap V(\lambda_i)\ni x\neq 0$ がとれるが.

x, x は1次従属なので (1) に矛盾.

(3) $V(\lambda_i)\ni x_i\neq 0$ とすると. $\{x_1,\cdots,x_n\}$ は基底になる (命題4.10)

今. $V(\lambda_1)\ni x$ をとると.

$x=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$ より

$1\cdot(a_1x_1-x)+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0$ となる.

もし $a_1x_1-x\neq 0$ なら (1) より 1次独立性がでるので矛盾する.

∴ $a_1x_1-x=0$ となる ∴ $x=a_1x_1$. である.

これより $V(\lambda_1)=\langle x_1\rangle$ となり. $\dim V(\lambda_1)=1$ となる.

<u>定理6.5</u>. λ を A の固有値, k をその重複度とすると.

$\dim V(\lambda)\leqq k$ である.

(∵) もし. $\dim V(\lambda)\geqq k+1$ であったとすると.

1次独立な $x_1,\cdots,x_{k+1}\in V(\lambda)$ がとれる. さらに.

$y_1,\cdots,y_{n-k-1}$ を. $x_1,\cdots,x_{k+1},y_1,\cdots,y_{n-k-1}$ が基底になるようとり, (定理4.11)

$P=[x_1\cdots x_{k+1}\ y_1\cdots y_{n-k-1}]$ とおくと.

$AP=[Ax_1\cdots Ax_{k+1}\ Ay_1\cdots Ay_{n-k-1}]$

$=[\lambda x_1\cdots\lambda x_{k+1}\ Ay_1\cdots Ay_{n-k-1}]$ より

$$\varphi_A(t)\cdot|P| = |(tE-A)\cdot P| = |tP-AP|$$

$$= |[tx_1 \cdots tx_{k+1}\ ty_1 \cdots ty_{n-k-1}] - [\lambda x_1 \cdots \lambda x_{k+1}\ Ay_1 \cdots Ay_{n-k-1}]|$$

$$= |[(t-\lambda)x_1 \cdots (t-\lambda)x_{k+1}\ (tE-A)y_1 \cdots (tE-A)y_{n-k-1}]|$$

$$= (t-\lambda)^{k+1}\,|[x_1 \cdots x_{k+1}\ (tE-A)y_1 \cdots (tE-A)y_{n-k-1}]|$$

となり．重複度は $k+1$ 以上になり矛盾．

$\therefore$ $\dim V(\lambda) \leq k$ である．