確率・統計　解答例

1. $P(A) = 1 \times \frac{3}{9}$　（Xさんが出したのに対し、例えばXさんがグーなら、$\underbrace{(Y,Z) = (チョキ, チョキ), (チョキ, グー), (グー, チョキ)}_{\text{Xさんが勝つのは3通り}}$ の3通りが勝ちになる）

$= \frac{1}{3}$　$(= P(B))$

$P(A \cap B) = 1 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

$A\cap B$になるには、YさんはXさんと同じでなければならず、かつ、Zさんはまけるものでなければいけない。

$\therefore\ P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A\cap B)} = \frac{1}{3} = P(B)$

より、AとBは独立である。

2. 事象Aを1点差以内であること、事象Bを2点差以上であること、

事象Eを試合に勝つこと、とすると、ベイズの定理より

$$P(E|A) = \frac{P(A)\cdot P(E|A)}{P(A)\cdot P(E|A) + P(B)P(E|B)}$$

$$= \frac{0.6\times 0.7}{0.6\times 0.7 + 0.4\times 0.5} = \frac{42}{62} = \frac{21}{31}$$ である。

$\boxed{3}$ $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,p(x)\,dx = \int_0^{\infty} x\,2e^{-2x}\,dx$

$= \left[-xe^{-2x}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-2x}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{2}$

$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\,dx - E(X)^2 = \int_0^{\infty} 2x^2 e^{-2x}\,dx - \frac{1}{4}$

$= \left[-x^2e^{-2x}\right]_0^{\infty} + \int 2xe^{-2x}\,dx - \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.　　$\sigma(X) = \frac{1}{2}$　である。

[4] (1) $P(X=1)=\frac{5}{20}+\frac{1}{20}=\frac{3}{10}$, $P(Y=1)=\frac{3}{20}+\frac{3}{20}+\frac{1}{20}=\frac{7}{20}$ である.

(2) $E(X)=-1\cdot\frac{1}{20}(2+3+1)+0\,\frac{1}{20}(4+3+1)+1\cdot\frac{3}{10}=0$

$E(Y)=0\cdot\frac{1}{20}(2+4+5)+1\cdot\frac{7}{20}+2\cdot\frac{1}{20}(1+1)=\frac{11}{20}$ である

(3). $\gamma(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=E(XY)$

$=\frac{1}{20}\left((-1)\cdot1\cdot3+(-1)\cdot2\cdot1+1\cdot1\cdot1\right)=\frac{-4}{20}=-\frac{1}{5}$ である

(0となる項は無視して計算した)

[5] Xを1が出た回数とすると. $B(180,\frac{1}{6})$に従うので.

$E(X)=180\cdot\frac{1}{6}=30$, $V(X)=180\cdot\frac{1}{6}(1-\frac{1}{6})=25$ であり.

$E(X)\geq30$ より. Yを$N(30,25)$に従うとすると.

$P(X\geq25)=P(Y\geq24.5)$ となる.

ここで $Z=\frac{Y-30}{5}$ とすると.

$P(Y\geq24.5)=P(Z\geq\frac{24.5-30}{5})=P(Z\geq-1.1)$

$=\frac{1}{2}+P(0\leq Z\leq1.1)=0.5+0.3643=0.8643$ である.

[6] Xを5000個調べたときの不良品の割合, pを不良品の割合とすると.

Xはほぼ. $N(p,\frac{1}{5000}p(1-p))$に従う. ここで

$P(X-\delta\leq p\leq X+\delta)=0.99$となる$\delta$を求めると.

$$P(X-\delta \le p \le X+\delta) = P(p-\delta \le X \le p+\delta) \quad —☆$$

ここで $Z = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{5000}p(1-p)}}(X-p) = \dfrac{\sqrt{5000}}{\sqrt{p(1-p)}}(X-p)$ とおくと.

$$☆ = P\left(\frac{-\sqrt{5000}}{\sqrt{p(1-p)}}\delta \le Z \le \frac{\sqrt{5000}}{\sqrt{p(1-p)}}\delta\right) = 2P\left(0 \le Z \le \frac{\sqrt{5000}}{\sqrt{p(1-p)}}\delta\right) = 0.99$$

$\therefore P\left(0 \le Z \le \dfrac{\sqrt{5000}}{\sqrt{p(1-p)}}\delta\right) = 0.495$ となり.

$\delta = \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{5000}} \cdot 2.5758$ となる. ここで $p = \dfrac{100}{5000} = \dfrac{1}{50}$ を代入すれば.

$\delta = \dfrac{1}{50\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{49}{50 \cdot 50}} \cdot 2.5758 = \dfrac{7}{2500\sqrt{2}} \cdot 2.5758 \fallingdotseq 0.005$ (or 0.0051) となる.

$\therefore$ 99%信頼区間は $0.015 \le p \le 0.025$ である.

7 θを糸の強さの平均, Xを20本調べたときの標本平均とする.

(1) $H_0: \theta = 12.6$, (2) $H_1: \theta > 12.6$

(3) Xは $N\left(\theta, \dfrac{(1.8)^2}{20}\right)$ に従うので

$Z = \dfrac{\sqrt{20}}{1.8}(X-\theta)$ は $N(0,1)$ に従う. これを検定統計量とする.

(4) $P(Z > \theta(0.05)) = 0.05$ となる $\theta(0.05)$ を求めると.

$P(0 \le Z < \theta(0.05)) = 0.45$ より. $\theta(0.05) = 1.6449$. である.

(5) $Z = \dfrac{\sqrt{20}}{1.8}(13.2-12.6) = \dfrac{2}{3}\sqrt{5} \fallingdotseq 1.49$

(6) Zは棄却域にないので 有意水準5%で H_0が採択される. (改良の効果はなかった)