## 再生性と中心極限定理

証明はしないが、次の3つが成り立つ.

**定理1.8.3**

互いに独立な $X_1$ と $X_2$ が $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ と $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ に従うとき,

$a_1X_1 + a_2X_2$ は $N(a_1\mu_1 + a_2\mu_2,\ a_1^2 \cdot \mu_1^2 + a_2 \cdot \mu_2^2)$ に従う.

**定理1.8.4**

互いに独立な $X_1, \cdots, X_n$ が全て $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき.

(i) $X_1 + \cdots + X_n$ は $N(n \cdot \mu, n \cdot \sigma^2)$ に従う

(ii) $\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ は $N(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2)$ に従う

**定理1.8.5**（中心極限定理）

互いに独立な $X_1, \cdots, X_n$ が全て $E(X_i) = \mu$, $V(X_i) = \sigma^2$ であるとき. $n$ が十分大なら

(i) $X_1 + \cdots + X_n$ は ほぼ $N(n\mu, n\sigma^2)$ に従う

(ii) $\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ は ほぼ $N(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2)$ に従う

なお. $n \geqq 50$ であればこの定理を使ってよいとする

例1. 四 1回投げたときの値を $X$ とすると. $E(X) = \frac{7}{2}$, $V(X) = \frac{35}{12}$ だったので,

$\overline{X}$ はほぼ. $N(\frac{7}{2}, \frac{1}{420} \cdot \frac{35}{12}) = N(\frac{7}{2}, (\frac{1}{12})^2)$ に従う.

ここで $Z = \dfrac{\overline{X} - \frac{7}{2}}{\frac{1}{12}}$ とすると. $Z$ は $N(0,1)$ に従い.

$$P(3.4 \leqq \overline{X} \leqq 3.6) = P\left(\frac{3.4 - 3.5}{\frac{1}{12}} \leqq Z \leqq \frac{3.6 - 3.5}{\frac{1}{12}}\right)$$

$= P(-1.2 \leqq Z \leqq 1.2) = 2 \times P(0 \leqq Z \leqq 1.2) = 0.7698$ である.

問 20 21

1回投げたときを$X$とすると. $E(X)=\frac{1}{2}$, $V(X)=\frac{1}{4}$ だったので.

平均値$\overline{X}$はほぼ. $N\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{100}\cdot\frac{1}{4}\right)=N\left(\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{20}\right)^2\right)$ に従う.

ここで $Z=\dfrac{\overline{X}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{20}}$ とおくと. $Z$は$N(0,1)$に従い.

$$P(0.4 \leqq \overline{X} \leqq 0.6) = P\left(\frac{0.4-0.5}{\frac{1}{20}} \leqq Z \leqq \frac{0.6-0.5}{\frac{1}{20}}\right)$$

$=P(-2 \leqq Z \leqq 2) = 2 \times P(0 \leqq Z \leqq 2) = 0.9546$ である.

21 1回投げたときを$X$とすると. $E(X)=\frac{7}{2}$, $V(X)=\frac{35}{12}$ だったので.

平均値$\overline{X}$はほぼ. $N\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{500}\cdot\frac{35}{12}\right)=N\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{1200}\right)$ に従う

ここで $Z=\dfrac{\overline{X}-\frac{7}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{1200}}}$ とおくと.これは$N(0,1)$に従い.

$$P(3.45 \leqq \overline{X} \leqq 3.55) = P\left(\frac{3.45-3.5}{\sqrt{\frac{7}{1200}}} \leqq Z \leqq \frac{3.55-3.5}{\sqrt{\frac{7}{1200}}}\right)$$

$=P(-0.65 \leqq Z \leqq 0.65) = 2 \times P(0 \leqq Z \leqq 0.65)$

$=2 \times 0.2422 = 0.4844$ である.

## 二項分布

例. $\frac{1}{10}$ で当たるアイスを5本かうと. 2本あたる確率は.

$${}_5C_2 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^3 = \frac{1}{10^5} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 9^3 = \frac{9^3}{10^4} = 0.0729$$ である.

これを一般的にすると. 次のようになる

定義 1.7. 1回の試行で. 事象 $A$ がおこる確率が $p$ のとき.

$n$回で $A$ がおこる回数を $X$ とすると.

$$P(X=x) = {}_nC_x \cdot p^x \cdot (1-p)^x \quad (x=0, 1, \cdots, n)$$ となる.

このとき $X$ は二項分布 $B(n, p)$ に従うという.

定理 1.9.1. $X$ が $B(n, p)$ に従うとき.

$E(X) = n \cdot p$. $V(X) = n \cdot p(1-p)$ である.

∵ $n$回の試行を $X_1, \cdots, X_n$ とすると.

$$E(X_i) = 1 \times p + 0 \times (1-p) = p.$$

$$V(X_i) = 1^2 \times p + 0^2 \times (1-p) - E(X_i)^2 = p(1-p)$$ である. これより

$$E(X) = n \cdot E(X_i) = n \cdot p$$

$$V(X) = n \cdot V(X_i) = n \cdot p(1-p)$$ となる

定理1.9.2. $X$ が $B(n, p)$ に従うとき、$E(X) = n \cdot p \geqq 5$ であれば、

$X$ は近似的に $N(np, np(1-p))$ に従う

定理1.9.3. $Z$ が $N(np, np(1-p))$ に従うとすると.

$$P(a \leqq X \leqq b) \fallingdotseq P\left(a - \frac{1}{2} \leqq Z \leqq b - \frac{1}{2}\right)$$ ($a, b$ は自然数) とできる.

例 22 $X$ は $B(60, \frac{1}{10})$ に従う. $E(X) = 60 \times \frac{1}{10} = 6 \geqq 5$ より定理1.9.2が使える.

$V(X) = 60 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10} = \frac{54}{10}$ より. $Y$ を $N(6, \frac{54}{10})$ に従うとすると.

$P(10 \leqq X) = P(9.5 \leqq Y)$ 　　ここで $Z = \dfrac{Y-6}{\sqrt{\frac{54}{10}}}$ とすれば.

$= P\left(\dfrac{9.5-6}{\sqrt{\frac{54}{10}}} \leqq Z\right) \fallingdotseq P(1.51 \leqq Z) = 0.5 - 0.4345 = 0.0655$ である.

問 22 23 $X$ は $B(100, \frac{1}{2})$ に従う. $E(X) = 50 \geqq 5$, $V(X) = 25$ より

$Y$ を $N(50, 25)$ に従うとし. $Z = \dfrac{Y-50}{5}$ とすると.

$P(X \geqq 60) = P(Y \geqq 59.5) = P\left(Z \geqq \dfrac{59.5-50}{5}\right) = P(Z \geqq 1.9)$

$= 0.5 - 0.4713 = 0.0287$ となる

23 $X$ は $B(10, 0.65)$ に従うとすると. $E(X) = 6.5$, $V(X) = 2.275$ より

$Y$ を $N(6.5, 2.275)$ に従うとし. $Z = \dfrac{Y-6.5}{\sqrt{2.275}}$ とすると.

$P(X \geqq 7) = P(Y \geqq 6.5) = P\left(Z \geqq \dfrac{6.5-6.5}{\sqrt{2.275}}\right) = P(Z \geqq 0) = \frac{1}{2}$.

$P(X \leqq 3) = P(Y \leqq 3.5) = P\left(Z \leqq \dfrac{3.5-6.5}{\sqrt{2.275}}\right) = P(Z \leqq -1.99)$

$= 0.5 - 0.4767 = 0.0233$ である