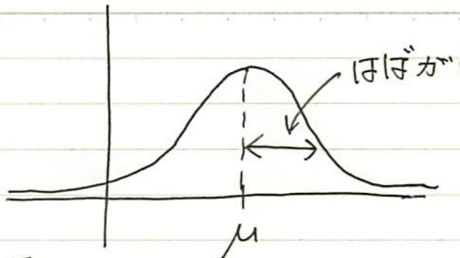
正規分布

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



の確率分布に従う連続型確率分布を

正規分布またはガウス分布といい，$N(\mu, \sigma^2)$ とかく.

定理1.8.1. 確率変数 Z が $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき.

$E(Z)=\mu$，$V(Z)=\sigma^2$ である

∵ 公式. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ を用いて計算すると.

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

ここで $x = \sqrt{2}\sigma t + \mu$ として置換積分すると.

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (\underbrace{\sqrt{2}\sigma t}_{\text{で奇関数なので積分は0}} + \mu) \cdot e^{-t^2} \sqrt{2}\sigma\, dt$$

$$= \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \mu.$$

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\, dx - \mu^2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx - \mu^2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2}\sigma t + \mu)^2 e^{-t^2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sigma \cdot dt - \mu^2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (2\sigma^2 t^2 + \underbrace{2\sqrt{2}\sigma \cdot \mu \cdot t}_{\hookrightarrow 0\text{に}} + \underbrace{\mu^2}_{\hookrightarrow \sqrt{\pi}\cdot\mu^2\text{になり}-\mu^2\text{とキャンセル}}) e^{-t^2} dt - \mu^2$$

$$= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot e^{-t^2} dt = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \left[t \cdot -\frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sigma^2$$

//

とくに、$N(0,1)$ を 標準正規分布 という。この確率密度関数は、

$$\varphi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$$ で与えられており、

$$\Phi(z)=P(0\leqq Z\leqq z)=\int_0^z \varphi(z)\,dz$$ と表す。

この積分は計算できないので、正規分布表を利用する。

例 14 (1) 表I より $P(0\leqq Z\leqq 0.86)=0.3051$

(2) $P(-1.05\leqq Z<1.29)=P(-1.05\leqq Z\leqq 0)+P(0\leqq Z<1.29)$

$=P(0\leqq Z\leqq 1.05)+P(0\leqq Z<1.29)$

$P(-1.05\leqq Z\leqq 0)=\int_{-1.05}^{0}\varphi(z)\,dz=\int_0^{1.05}\varphi(z)\,dz$ より

$=0.3531+0.4015=0.7546$

(3) 表II より $z=0.6840$ である

問 15 (1) 表I より $P(0<Z<0.53)=0.2019$

(2) $P(-0.25\leqq Z<2.29)=P(0\leqq Z\leqq 0.25)+P(0\leqq Z<2.29)$

$=0.0987+0.4890=0.5877$

(3) 表II より $z=0.3719$

(4) $P(Z<1)=P(-\infty<Z<1)=P(-\infty<Z\leqq 0)+P(0\leqq Z<1)$

$=0.5+0.3413=0.8413$

(5) $P(Z<-1.23)=P(-\infty<Z\leqq 0)-P(-1.23<Z\leqq 0)$

$=0.5-0.3907=0.1093$

(6) $P(z<Z<0)=P(0<Z<-z)=0.382$ より

$-z=1.1850$ $\therefore z=-1.1850$

(7) $P(z<Z)=\int_z^\infty \varphi(z)\,dz=0.712 \geqq \frac{1}{2}$ より $z\leqq 0$ でないといけない. これより

$P(z<Z)=P(z<Z\leqq 0)+P(0\leqq Z<\infty)=0.712$.

$P(z<Z\leqq 0)=0.212$. $\therefore z=-0.5592$.

(8) $P(Z<z)=\int_{-\infty}^z \varphi(z)\,dz=0.142\leqq\frac{1}{2}$ より $z\leqq 0$ でないといけない. これより

$P(Z<z)=P(-\infty<Z\leqq 0)-P(z\leqq Z\leqq 0)=0.142$

$P(z\leqq Z\leqq 0)=0.358$ $\therefore z=-1.0714$.

定理1.8.2. X が $N(\mu,\sigma^2)$ に従うとき, $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ とおくと.
Z は $N(0,1)$ に従う. さらに

$$P(a\leqq X\leqq b)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\leqq Z\leqq\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$ となる.

$\because$ $P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\leqq Z\leqq\frac{b-\mu}{\sigma}\right)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\leqq\frac{X-\mu}{\sigma}\leqq\frac{b-\mu}{\sigma}\right)=P(a\leqq X\leqq b)$

となる. さらに.

$$P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\leqq Z\leqq\frac{b-\mu}{\sigma}\right)=P(a\leqq X\leqq b)$$

$$=\int_a^b\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$ ここで $z=\frac{x-\mu}{\sigma}$ とおくと. $dz=\frac{1}{\sigma}dx$

$x=\sigma z+\mu$ より

$$=\int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sigma}\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}\cdot\sigma\cdot dz=\int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}}\varphi(z)\,dz$$

より. Z が $N(0,1)$ に従うこともわかる

例 16 $Z=\dfrac{X-5}{6}$ とおくと Z は $N(0,1)$ に従い.

$P(3<X<8)=P\left(\dfrac{3-5}{6}<Z<\dfrac{8-5}{6}\right)\fallingdotseq P(-0.33<Z<0.5)$

$=0.1293+0.1915=0.3208$ である. また.

$P(X\leqq c)=P\left(Z\leqq\dfrac{c-5}{6}\right)=0.135$ である. これを求めると.

$P\left(\dfrac{c-5}{6}\leqq Z\leqq 0\right)=0.465$ より $\dfrac{c-5}{6}=-1.8119$ となり

$c=-5.8714$ となる

問 17, 18 $Z=\dfrac{X-2}{4}$ とおくと Z は $N(0,1)$ に従い.

$P(0<X<2)=P\left(\dfrac{0-2}{4}<Z<\dfrac{2-2}{4}\right)=P(-0.5<Z<0)=0.1915$. また.

$P(X\leqq c)=P\left(Z\leqq\dfrac{c-2}{6}\right)=0.329$ より

$P\left(\dfrac{c-2}{6}\leqq Z\leqq 0\right)=0.171$ $\therefore \dfrac{c-2}{6}=-0.4427$ $\therefore c=-0.2292$ である.

18 $Z=\dfrac{X-3}{\sqrt{10}}$ とおくと. Z は $N(0,1)$ に従い.

$P(0<X<1)=P\left(\dfrac{0-3}{\sqrt{10}}<Z<\dfrac{1-3}{\sqrt{10}}\right)=P\left(\dfrac{-3}{\sqrt{10}}<Z<\dfrac{-2}{\sqrt{10}}\right)$

$\fallingdotseq P(-0.95<Z\leqq 0)-P(-0.63\leqq Z\leqq 0)=0.3289-0.2357=0.0932$.

$P(X>c)=P\left(Z>\dfrac{c-3}{\sqrt{10}}\right)=0.329$ より

$P\left(0\leqq Z\leqq\dfrac{c-3}{\sqrt{10}}\right)=0.171$ $\therefore \dfrac{c-3}{\sqrt{10}}=0.4427$ $\therefore c=4.3999$.