確率・統計

確率とは

注目する事象(ことがら)が実現すると期待される割合

定義 1.1 諸々の定義を以下でする.

全事象 Ω : 実現可能な全てを集めた事象

空事象 ϕ : 実現しえない事象

以下事象A、Bに対し.

和事象 $A \cup B$: A,Bの少なくとも1つが起る事象

積事象 $A \cap B$: A、Bの両方が起る事象

余事象 A^c : Aが起らない事象

AとBが排反 : $A \cap B = \phi$: AとBが同時には起らないこと.

例. (1)

サイコロ投げを考えると.全事象Ωは.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ とできる. また.

$A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6\}$, $A^c = \{2, 4, 6\}$

$A \cap B = \{5\}$, $B \cap C = \phi$ である. とくにBとCは排反である

問題 $\boxed{1}$(2), $\boxed{2}$

解答 $\boxed{1}$(2)

$A \cup C = \{1, 2, 3, 5\}$, $A \cap C = \{1\}$

$B^c = \{1, 2, 3\}$, $B^c \cap C^c = \{3\}$.

2 $A \cap B = \{(1,1), (1,3), (1,5)\}$

$A \cup B = \left\{ \begin{array}{l} (1,1), (1,3), (1,5), (3,3), (3,5), (5,5) \\ (1,2), (1,4), (1,6) \end{array} \right\}$

$A \cap B \cap C = \{(1,5)\}$

定義1.2 事象Aに対し，数$P(A)$が以下をみたすとき，$P(A)$をAが起る確率という．

(1) 任意の事象Aに対し　$0 \leqq P(A) \leqq 1$

(2) $P(\Omega) = 1$, $P(\phi) = 0$

(3) AとBが排反ならば，　$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

この定義から次が導かれる

定理1.1.1（確率の加法定理）　事象A，Bに対し，

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

∵ $A \cap B$と$A \cap B^c$は排反，$(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A$より

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$　がわかる．

同様にして，

$P(A \cup B) = P(B) + P(A \cap B^c)$　となる．これらから導かれる．

問題 3，4

解答 3．$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$，$P(B) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$，$P(A \cap B) = \frac{3}{52}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{11}{26}$　である．

4 $P(A) = \frac{1}{3}$，$P(B) = \frac{8}{9}$，$P(A \cap B) = \frac{2}{9}$

$P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{8}{9} - \frac{2}{9} = 1$　である

定義1.3 事象 A, B に対し.

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$ を条件Bのもとで A が起る条件付き確率といい.

$P(A|B) = P(A)$ のとき、AとBは互いに独立という.

← $P(B|A)=P(B)$ でもよい.

A, B を考えると. $A\cap B$, $A^c\cap B$, $A\cap B^c$, $A^c\cap B^c$ の4つの排反な事象が考えられる. このうち. Bがおこるのは. $A\cap B$ と $A^c\cap B$ なので. Bが起る条件のもとで. Aが起る割合は.

$$\frac{P(A\cap B)}{P(A\cap B)+P(A^c\cap B)} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$ である.

	A	A^c
B	$A\cap B$	$A^c\cap B$
B^c	$A\cap B^c$	$A^c\cap B^c$

下は Bが起ってないので無視.
上だけ考えればよい.

また. $P(A|B) = P(A)$ は. Bが起っても、Aが起る確率は変わらないことを示す.
なので. BはAに影響を与えない ⟶ 独立 となる

一般に次の定理が成り立つ

定理 1.2.1. 乗法定理 : $P(A\cap B) = P(B)\cdot P(A|B)$

定理 1.2.2. AとBが独立なら. $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$

例. 5 (1) $P(A)=\frac{3}{10}$, $P(B)=\frac{3}{10}$, $P(A\cap B)=\frac{9}{100}$ より

$P(A|B)=\frac{3}{10}=P(A)$ となり, AとBは独立.

(2) $P(A)=\frac{3}{10}$

$P(B)=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}+\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{3}{10}$

$P(A\cap B)=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}=\frac{1}{15}$ より

$P(A|B)=\frac{1}{15}\div\frac{3}{10}=\frac{2}{9}\neq P(A)$ なので独立でない.

問題 16, 17, 18, 19

解答 16 $P(A)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14}+\frac{10}{15}\cdot\frac{5}{14}=\frac{1}{3}$

$P(A\cap B)=\frac{5}{15}\cdot\frac{4}{15}=\frac{4}{45}$ より

$P(B|A)=\frac{4}{45}\div\frac{1}{3}=\frac{4}{15}\neq P(B)$ となり独立でない.

17 コイントスは互いに独立なので, $\frac{1}{2^5}$ である

18 $P(A)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$, $P(B)=\frac{4}{52}\cdot\frac{3}{51}+\frac{48}{52}\cdot\frac{4}{51}=\frac{1}{13}$

$P(A\cap B)=\frac{1}{52}\cdot\frac{3}{51}+\frac{12}{52}\cdot\frac{4}{51}=\frac{1}{52}$ より

$P(A|B)=\frac{1}{52}\div\frac{1}{13}=\frac{1}{4}=P(A)$ となり AとBは独立.

19. A:取り出したとき、みえている面が赤

B:裏面が白 とすると.

$P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{2}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$ より

$P(B|A)=\frac{1}{6}\div\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$ である.